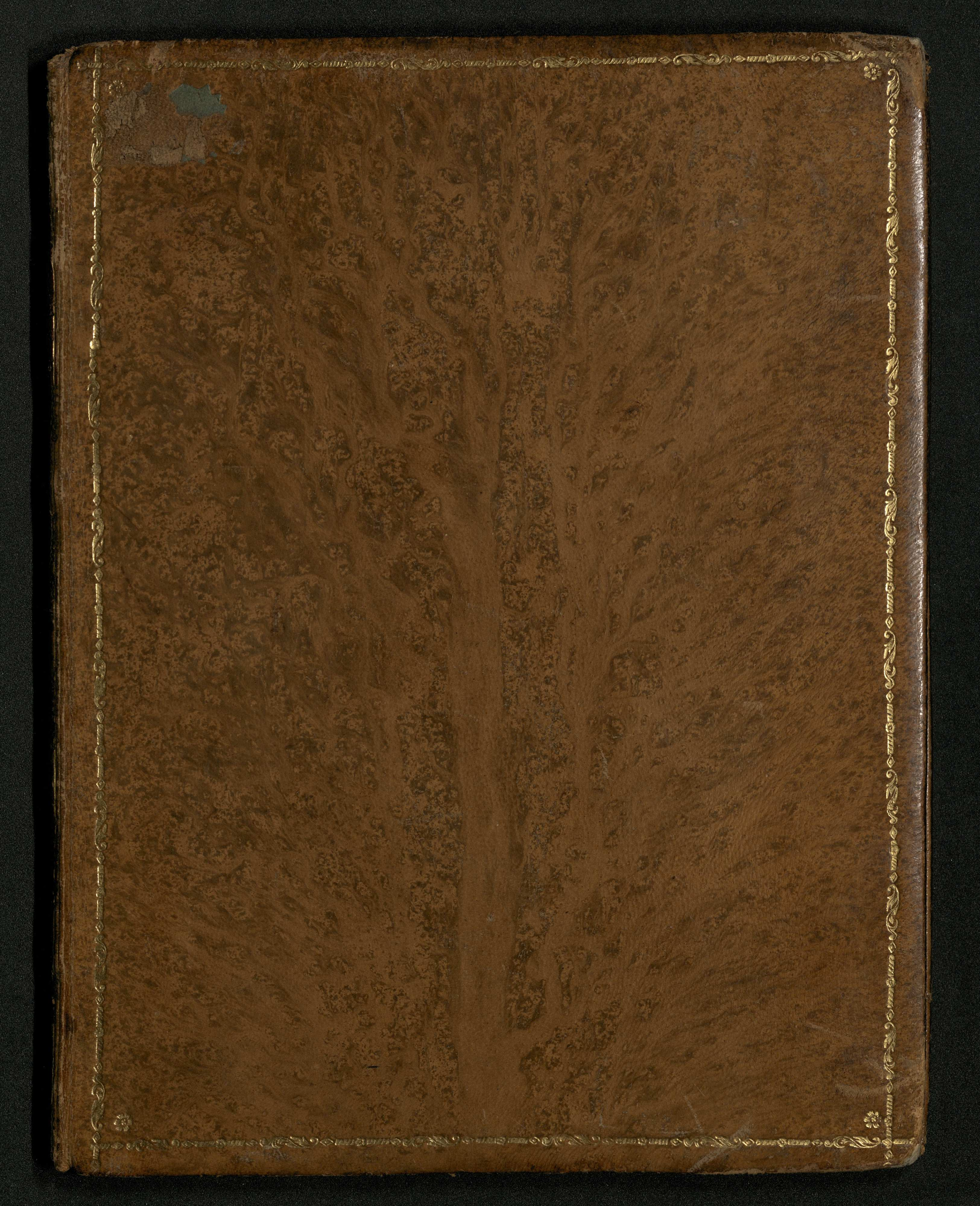
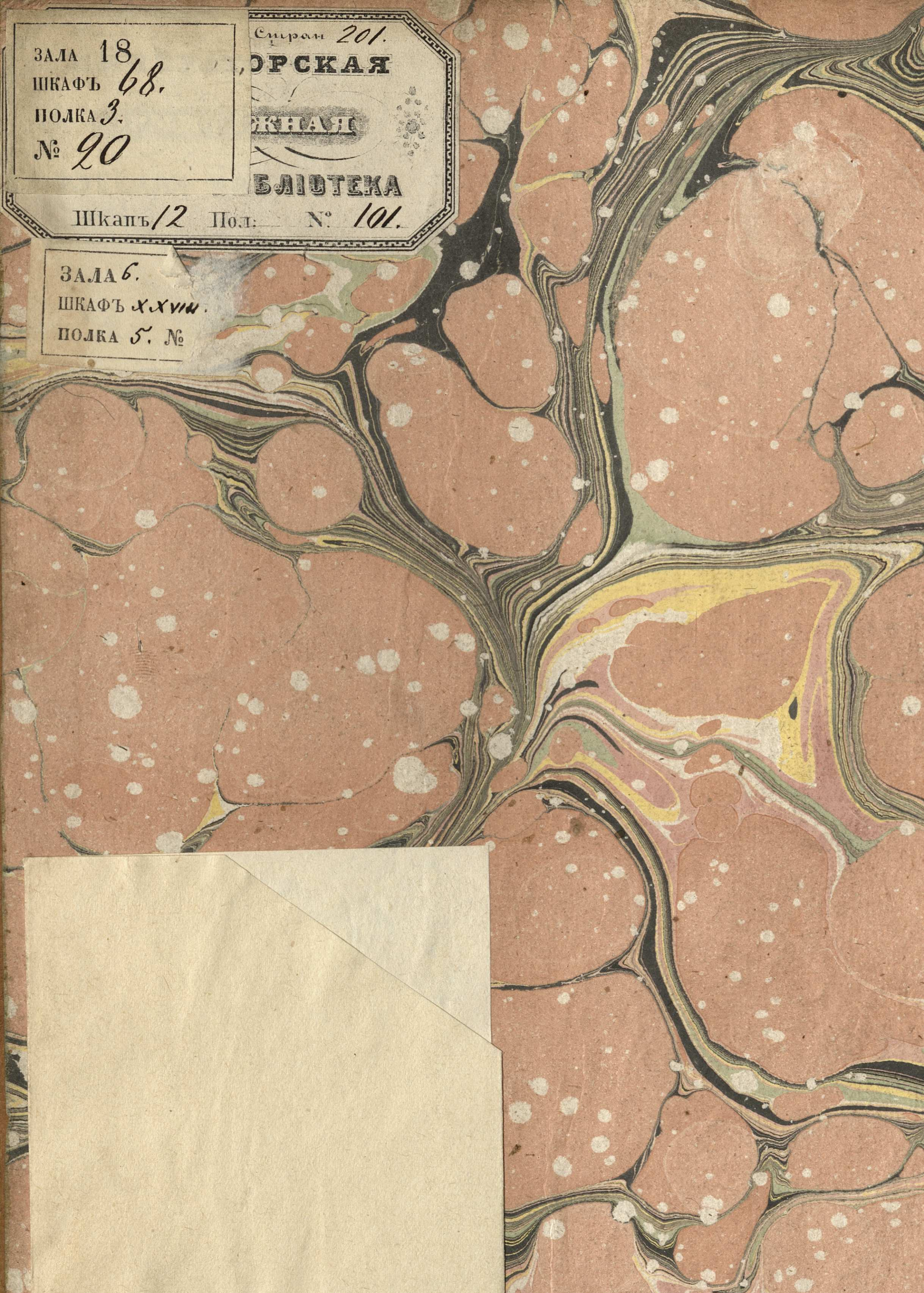
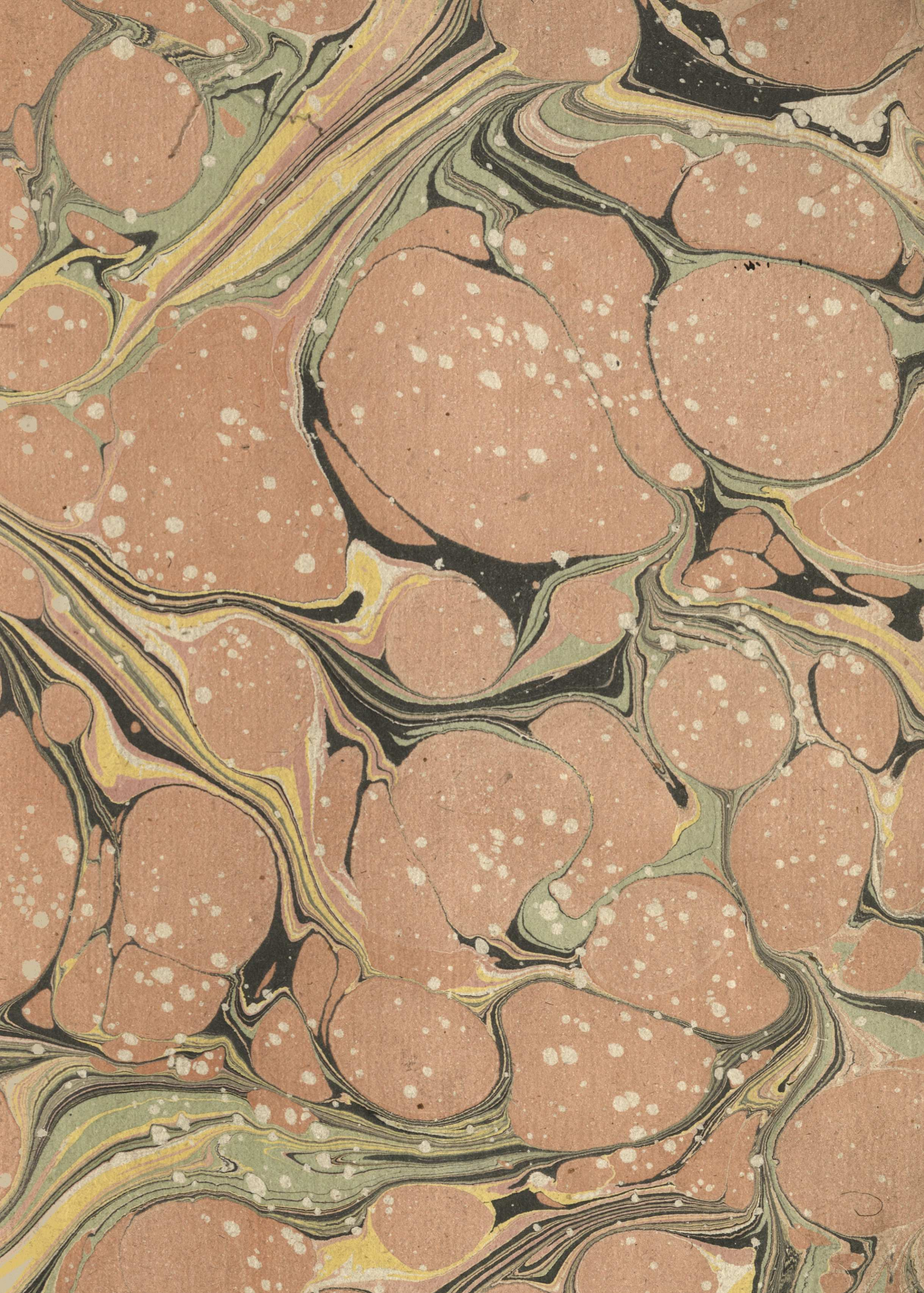
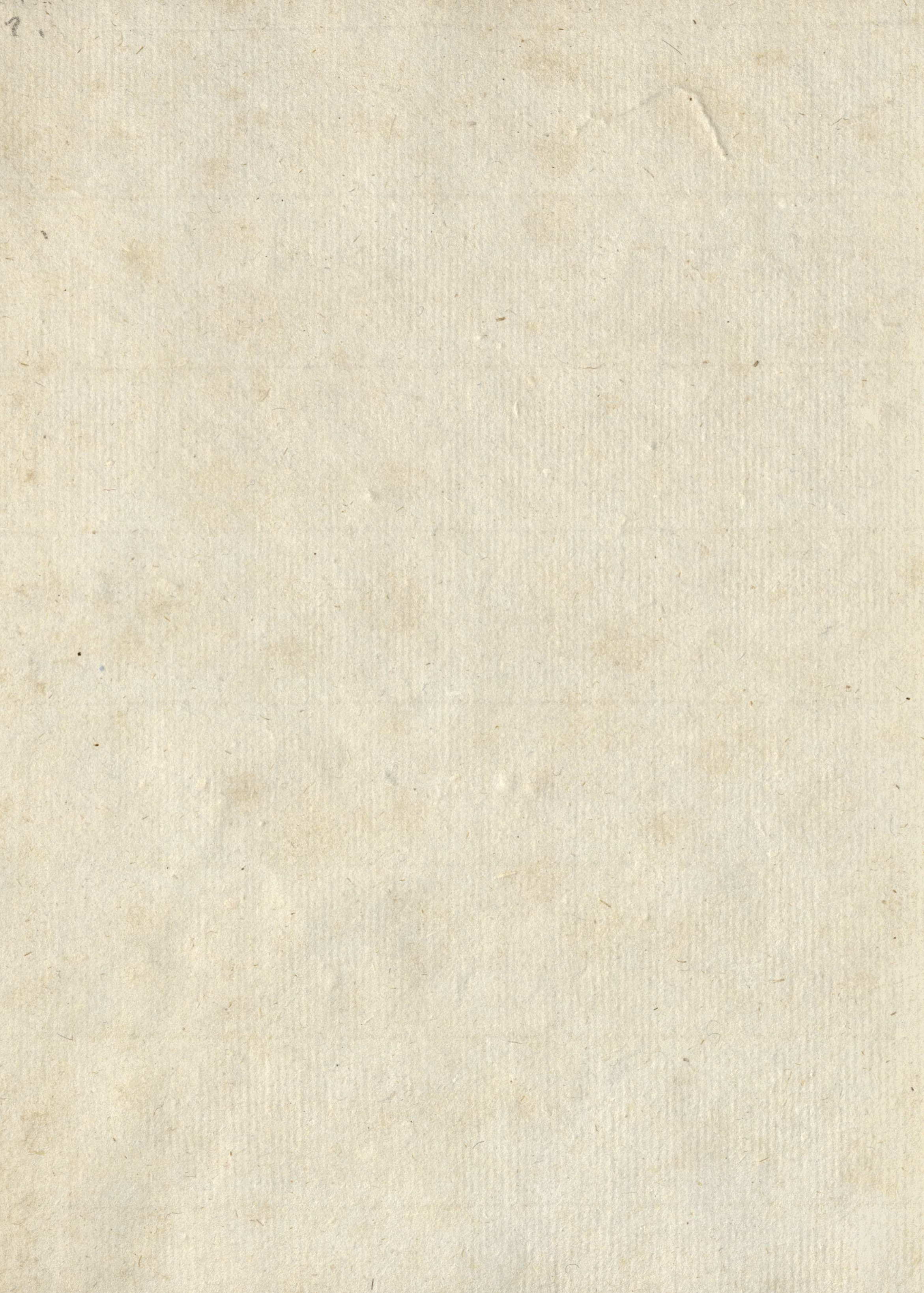



ЗАЛА 18
ШКАФЪ 68.
ПОЛКА 3.
№ 90
Стран 201.
ОРСКАЯ
ЖНАЯ
БЛІОТЕКА
Шкапъ 12 Пол: №. 101.
ЗАЛА 6.
ШКАФЪ XXVIII.
ПОЛКА 5. №





ПЛОСКАЯ и СФЕРИЧЕСКАЯ
ТРИГОНОМЕТРІЯ

съ

АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ ДОКАЗАТЕЛЬСТВАМИ,

собранными

МИХАИЛОМЪ ГОЛОВИНЫМЪ,

Надворнымъ Совѣтникомъ, Академіи наукъ Членомъ и учительской семинаріи Професоромъ.

ВЪ САНКТПЕТЕРБУРГѢ,

при Императорской Академіи Наукъ, 1789 года.

ПЛОСКОЙ ТРИГОНОМЕТРІИ

ГЛАВА I.

О названіи и свойствѣ линѣй Тригонометрическихъ.

1. *Тригонометрія плоская* или *прямолинейная* есть часть Геометріи, которая научаетъ изъ данныхъ трехъ частей прямолинейнаго треугольника, изъ коихъ хотя одной неотмѣнно должно быть сторонѣ, находить прочія его части. Черт. I.

2. Въ тригонометріи употребляются различныя наименованія: чтобъ объ нихъ получить точное свѣденіе, то изъ центра C радіусомъ CA, которой здѣсь равенъ всегда единицѣ полагается, описавъ кругъ и протянувъ два діаметра ACB и DCE пересѣкающіе себя подъ прямымъ угломъ, возми на четверти окружности AD гдѣ ниесть точку M, и проведи линѣю MC; тогда уголъ ACM означается двоякимъ образомъ, или длиною дуги AM между его боками находящеюся, или числомъ градусовъ, кои дѣйствительно въ углѣ ACM, или дугѣ AM содержатся.

3. По томъ изъ точки M, принявъ за непремѣнное начало точку A, опусти къ діаметру AB перпендикуляръ MP, такъ же къ діаметру DE перпендикуляръ MQ, и когда уголъ ACM положится $= \varphi$, то линія MP называется *синусъ угла* φ, которой всегда означается такъ: $MP = \sin.\ \varphi$; линѣя же MQ синусъ угла $MCQ = 90° - \varphi$, которой есть дополненіе угла φ до 90°, или до угла прямаго, называется *Косинусъ угла* φ. Но поелику $MQ = PC$, то и линѣя PC будетъ косинусъ угла φ, которой обыкновенно такъ изображается: $PC = \cos.\ \varphi$. Слѣдственно $PC = MQ = \cos.\ \varphi = \sin.\ (90° - \varphi)$. Или въ прямоугольномъ треугольникѣ какомъ ни есть PMC взявъ Гипотенузу MC за радіусъ, одинъ Катетъ противолежащій



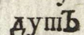
данному острому углу будетъ синусъ даннаго угла, а другой того же угла косинусъ.

4. Изъ свойства круга видно, что синусъ MP бываетъ всегда меньше дуги AM, развѣ она будетъ безконечно мала, въ коемъ случаѣ синусъ будетъ равенъ самой дугѣ; и на конецъ угла, которой $= 0$, синусъ будетъ такъ же $= 0$; косинусъ же его PC будетъ равенъ тогда радіусу или единицѣ. Но когда уголъ φ начнетъ прибавляться, то синусъ его становится больше, а косинусъ меньше, и когда уголъ φ дойдетъ до 90°, тогда синусъ будетъ равенъ радіусу, которой будучи равенъ единицѣ называется *синусъ цѣлой*; слѣдовательно синусъ угла прямаго $= 1$; косинусъ же совсемъ изчезаетъ, т. е. косинусъ угла прямаго $= 0$.

5. При семъ надлежитъ примѣчать, что для угла $ACM = \varphi$ будетъ уголъ $MCQ = 90 - \varphi$, коего синусъ равенъ линѣѣ MQ; но $MQ = PC = \text{coſ.}\ \varphi$; слѣдственно получимъ, какъ уже въ § 2 видѣли, $\text{ſin.}\ (90^\circ - \varphi) = \text{coſ.}\ \varphi$: косинусъ же угла $90^\circ - \varphi$ равенъ линѣѣ QC; но $QC = MP = \text{ſin.}\ \varphi$; слѣдовательно выйдетъ $\text{coſ.}\ (90 - \varphi) = \text{ſin.}\ \varphi$. Что самое произойдетъ въ формулѣ $\text{ſin:}\ (90^\circ - \varphi) = \text{coſ.}\ \varphi$, поставивъ $90^\circ - \varphi$ вмѣсто φ.

6. Когда уголъ φ перешедъ 90° будетъ увеличиваться, то синусъ его станетъ уменьшаться, а косинусъ прибавляться, и угла $BCm = 180^\circ - \varphi$ будетъ синусъ pm, а косинусъ Cp. Положивъ теперь $pm = PM = \text{ſin.}\ \varphi$, будетъ уголъ $BCm = ACm = \varphi = 180^\circ - \varphi$. слѣд: $\text{ſin.}\ \varphi = \text{ſin.}\ (180^\circ - \varphi)$. Но поелику $pc = PC$ падаетъ въ противную сторону въ разсужденіи положенія линѣй PC, или по другую сторону діаметра DCE; то должно брать ее за отрицательную: по сему выйдетъ $\text{coſ.}\ (180^\circ - \varphi.) = -\text{coſ.}\ \varphi$. Наконецъ, если φ будетъ равенъ 180°, то синусъ его совсемъ изчезнетъ, а косинусъ равенъ будетъ -1, слѣд: получимъ $\text{ſin.}\ 180^\circ = 0$ и $\text{coſ.}\ 180^\circ = -1$.

7. Когда уголъ φ перейдетъ предѣлъ 180°, тогда синусъ опять станетъ увеличиваться, а косинусъ уменьшаться, и угла $ECq = 270^\circ - \varphi$, синусъ и косинусъ будутъ


будутъ

дутЪ отрицательныя, для того, что первой по другую сторону дїаметра AB, а второй по другую сторону дїаметра DCE падаетЪ; слѣдственно выйдетЪ $\sin.(270^\circ - \varphi) = -\cos.\varphi$. для того, что $rq = MQ = PC = \cos.\varphi$ и $\cos.(270^\circ - \varphi.) = -\sin.\varphi$ по тому, что $Cr = MP = \sin.\varphi$. НаконецЪ, когда уголЪ φ сдѣлается равенЪ 270°, то синусЪ его будетЪ $= -1$, а косинусЪ $= 0$.

8. Когда же уголЪ φ сдѣлается болѣе 270°, то синусЪ начнетЪ уменьшаться, а косинусЪ увеличиваться и угла $ACR = 360^\circ - \varphi$ синусЪ будетЪ $= -\sin.\varphi$, косинусЪ же его $= \cos.\varphi$, для того, что линѣя PC опять по ту же сторону дїаметра DCE падать начинаетЪ, на которой прежде взята была за положительную. НапослѣдокЪ синусЪ цѣлой окружности или угла, которой вЪ себѣ содержитЪ 360°, синусЪ будетЪ $= 0$, а косинусЪ $= 1$.

9. ИзЪ сихЪ примѣчанїй слѣдуетЪ, что положивЪ половину окружности круга $= \pi$ или $180^\circ = \pi$, и назвавЪ какой ни есть уголЪ буквою φ, выйдетЪ всегда

$\sin.0\pi. = 0.$ $\cos.0\pi. = 1.$
$\sin.(\frac{1}{2}\pi - \varphi) = \cos.\varphi.$ $\cos.(\frac{1}{2}\pi - \varphi) = \sin.\varphi.$
$\sin.\frac{1}{2}\pi = 1.$ $\cos.\frac{1}{2}\pi = 0.$
$\sin.(\pi - \varphi) = \sin.\varphi.$ $\cos.(\pi - \varphi) = \cos.\varphi.$
$\sin.\pi = 0.$ $\cos.\pi = -1.$
$\sin.(\frac{3}{2}\pi - \varphi) = -\cos.\varphi.$ $\cos.(\frac{3}{2}\pi - \varphi) = -\sin.\varphi.$
$\sin.\frac{3}{2}\pi = -1.$ $\cos.\frac{3}{2}\pi = 0.$
$\sin.(2\pi - \varphi) = -\sin.\varphi.$ $\cos.(2\pi - \varphi) = \cos.\varphi.$
$\sin.2\pi = 0$ $\cos.2\pi = 1.$

РавнымЪ образомЪ будетЪ.

$\sin.(\frac{5}{2}\pi - \varphi) = \cos.\varphi.$ $\cos.(\frac{5}{2}\pi - \varphi) = \sin.\varphi.$
$\sin.\frac{5}{2}\pi = 1$ $\cos.\frac{5}{2}\pi = 0.$
$\sin.(3\pi - \varphi) = \sin.\varphi.$ $\cos.(3\pi - \varphi) = -\cos.\varphi.$
$\sin.3\pi = 0.$ $\cos.3\pi = -1.$
$\sin.(\frac{7}{2}\pi - \varphi) = -\cos.\varphi.$ $\cos.(\frac{7}{2}\pi - \varphi) = -\sin.\varphi.$
$\sin.\frac{7}{2}\pi = -1.$ $\cos.\frac{7}{2}\pi = 0.$
$\sin.(4\pi - \varphi) = -\sin.\varphi.$ $\cos.(4\pi - \varphi) = \cos.\varphi.$
$\sin.4\pi = 0.$ $\cos.4\pi = 1.$

И вообще, если n будетъ означать цѣлое какое ни есть число положительное, то выйдетъ всегда

$$\sin.\left(\frac{4n+1}{2}\pi-\varphi\right)=\cos.\varphi;\quad \cos.\left(\frac{4n+1}{2}\pi-\varphi\right)=\sin.\varphi.$$
$$\sin.\left(\frac{4n+2}{2}\pi-\varphi\right)=\sin.\varphi;\quad \cos.\left(\frac{4n+2}{2}\pi-\varphi\right)=-\cos.\varphi.$$
$$\sin.\left(\frac{4n+3}{2}\pi-\varphi\right)=-\cos.\varphi;\quad \cos.\left(\frac{4n+3}{2}\pi-\varphi\right)=-\sin.\varphi.$$
$$\sin.\left(\frac{4n+4}{2}\pi-\varphi\right)=-\sin.\varphi;\quad \cos.\left(\frac{4n+4}{2}\pi-\varphi\right)=\cos.\varphi.$$

10. Изъяснивъ синусы и косинусы, приступимъ теперь къ тангенсамъ и прочимъ линѣямъ въ Тригонометрїи употребляемымъ. На сей конецъ въ точкѣ A къ дїаметру AB проведи безпредѣльно перпендикулярную линѣю, и изъ центра C чрезъ точку на окружности круга взятую M протяни линѣю CMT пересѣкающую касательную линѣю въ точкѣ T, тогда линѣя AT называется *тангенсомъ угла* $ACT=\varphi$, или дуги AM, и пишется обыкновенно такъ: $AT=\text{tang.}\,\varphi$ или $AT=\text{tg}\,\varphi$. Линѣя же DN стоящая перпендикулярно на дїаметрѣ DE и касающаяся окружности въ точкѣ D называется тангенсъ угла $DCM=90^\circ-\varphi$, или *котангенсъ угла* φ, или всегда бываетъ $DN=\text{tg.}(90^\circ-\varphi)=\text{cot.}\,\varphi$.

11. Линѣя CT изъ центра къ тангенсу проведенная называется *секансъ угла* $ACM=\varphi$. Линѣя же CN секансъ угла $MCD=90^\circ-\varphi$ проведенная къ котангенсу называется *косекансомъ угла* φ. Первая изображается обыкновенно такъ: $CT=\text{sec.}\,\varphi$, а другая $CN=\text{cosec.}\,\varphi$.

12. Часть радїуса заключающагося между синусомъ и дугою называется *синусъ обращенной*. Такъ линѣя AP будетъ синусъ обращенной угла φ, которой обыкновенно такъ означается: $AP=\sin.\,\text{ver.}\,\varphi$. Но поелику $AC=1$ по положенїю, а $CP=\cos.\varphi$, то будетъ $\sin.\,\text{ver.}\,\varphi=1-\cos.\varphi$.

Черт. 2. 13. Положимъ теперь въ квадрантѣ ACD, коего радїусъ $CA=CD=1$, уголъ $ACM=\varphi$, коего дополненїе до угла прямаго $DCM=90^\circ-\varphi=\theta$. По томъ проведемъ прямыя линѣи MP и MQ къ CA и CD перпендикулярныя, такъ же изъ A и D касательныя линѣи AT и DN, съ кои-

ми

ии продолженный радїусъ встрѣчается въ точкахъ T и N; что сдѣлавъ надлежитъ примѣчать слѣдующїя наименованїя въ разсужденїи угла ϕ. 1. PM $=$ sin. ϕ: 2. AT $=$ tg. ϕ, и 3. CT $=$ sec. ϕ. а въ разсужденїи угла θ, 1. MQ $=$ CP $=$ sin. $\theta =$ cos. ϕ. 2. DN $=$ tg. $\theta =$ cot. ϕ, и 3. CN $=$ sec. $\theta =$ cosec. ϕ. Слѣдственно шесть выходитъ опредѣленїй для угла ϕ, кои суть 1. sin. $\phi =$ PM. 2. cos. $\phi =$ CP. 3. tg. $\phi =$ AT. 4. cot. $\phi =$ DN. 5. sec. $\phi =$ CT, и 6. cosec. $\phi =$ CN.

14. Описавъ линѣи въ тригонометрїи обыкновенно употребляемыя, приступимъ теперь къ разсмотренїю ихъ свойствъ. Первое изъ прямоугольнаго треугольника CPM слѣдуетъ очевидно $\sin.\phi^2 + \cos.\phi^2 = 1$, откуда $\sin.\phi = \sqrt{1 - \cos.\phi^2}$ или $\cos.\phi = \sqrt{1 - \sin.\phi^2}$. И такъ по данному косинусу можно найти синусъ, и обратно.

15. По томъ изъ прямоугольнаго треугольника CAT выйдетъ $\text{tg}.\phi^2 + 1 = \sec.\phi^2$, откуда $\sec.\phi = \sqrt{\text{tg}.\phi^2 + 1}$, а $\text{tg}.\phi = \sqrt{\sec.\phi^2 - 1}$.

16. Наконецъ изъ треугольника прямоугольнаго CDN получимъ $\cot.\phi^2 + 1 = \text{cosec}.\phi^2$, откуда $\text{cosec}.\phi = \sqrt{\cot.\phi^2 + 1}$, или $\cot\phi = \sqrt{\text{cosec}.\phi^2 - 1}$.

17. Теперь изъ подобїя треугольииковъ CPM и CAT выходятъ слѣдующїя три пропорцїи:

1я. CP: PM $=$ CA: AT, или $\cos.\phi : \sin.\phi = 1 : \text{tg}.\phi$:, откуда $\sin.\phi = \cos.\phi.\ \text{tg}.\phi$, или $\cos.\phi = \frac{\sin.\phi}{\text{tg}.\phi}$ или $\text{tg}.\phi = \frac{\sin.\phi}{\cos.\phi}$.

2я. CP : CM $=$ CA: CT или $\cos.\phi : 1 = 1 : \sec.\phi$; откуда $\cos.\phi.\ \sec.\phi = 1$ или $\cos.\phi = \frac{1}{\sec.\phi}$ или $\sec.\phi = \frac{1}{\cos.\phi}$.

3я. PM : CM $=$ AT : CT, или $\sin.\phi : 1 = \text{tg}.\phi : \sec.\phi$, откуда tg. $\phi =$ или $\sin.\phi = \frac{\text{tg}.\phi}{\sec.\phi}$ или $\sec.\phi = \frac{\text{tg}.\phi}{\sin.\phi}$.

18. Поелику треугольники CDN и CQM подобны между собою, то слѣдуетъ

1е. CQ : QM $=$ CD : DN или $\sin.\phi : \cos.\phi = 1 : \cot.\phi$ откуда $\cos.\phi = \sin.\phi.\ \cot.\phi$, или $\sin.\phi = \frac{\cos.\phi}{\cot.\phi}$ или $\cot.\phi = \frac{\cos.\phi}{\sin.\phi}$.

2е. CQ : CM $=$ CD : CN или sin. φ : 1 $=$ 1 : cosec. φ; откуда sin. φ. cosec. $\varphi = 1$ или sin. $\varphi = \frac{1}{\text{cosec. } \varphi}$ или cosec. $\varphi = \frac{1}{\text{sin. } \varphi}$.

19. На конецъ изъ подобія треугольниковъ CDN и CAT слѣдуетъ
CA : AT $=$ DN : DC, или 1 : tg. φ $=$ cot. φ : 1; откуда tg. φ. cot. $\varphi = 1$ или tg. $\varphi = \frac{1}{\text{cot. } \varphi}$ или cot. $\varphi = \frac{1}{\text{tg. } \varphi}$.

20. Поставивъ теперь въ формулахъ tg. $\varphi = \frac{\text{sin. } \varphi}{\text{cos. } \varphi}$ и cot. $\varphi = \frac{\text{cos. } \varphi}{\text{sin. } \varphi} = \frac{1}{\text{tg. } \varphi}$ въ § 16, 17 и 18 найденныхъ вмѣсто sin. φ и cos. φ величины въ § 8 назначенныя, получимъ

$\text{tg. } 0 = \frac{\text{sin. } 0}{\text{cos. } 0} = \frac{0}{1} = 0$; $\qquad \text{cot. } 0 = \frac{1}{0} = \infty$

$\text{tg. } (\frac{1}{2}\pi - \varphi) = \frac{\text{sin.}(\frac{1}{2}\pi - \varphi)}{\text{cos.}(\frac{1}{2}\pi - \varphi)} = \frac{\text{cos. } \varphi}{\text{sin } \varphi} = \text{cot. } \varphi$; $\text{cot.}(\frac{1}{2}\pi - \varphi) = \frac{\text{sin. } \varphi}{\text{cos. } \varphi} = \text{tg. } \varphi$

$\text{tg. } \frac{1}{2}\pi = \frac{\text{sin. } \frac{1}{2}\pi}{\text{cos. } \frac{1}{2}\pi} = \frac{1}{0} = \infty$ $\qquad \text{cot. } \frac{1}{2}\pi = \frac{0}{1} = 0$

$\text{tg.}(\pi - \varphi) = \frac{\text{sin. } (\pi - \varphi)}{\text{cos. } (\pi - \varphi)} = \frac{\text{sin. } \varphi}{-\text{cos. } \varphi} = -\text{tg. } \varphi$; $\text{cot. } (\pi - \varphi) = -\frac{\text{cos. } \varphi}{\text{sin. } \varphi} = -\text{cot. } \varphi$

$\text{tg. } \pi = \frac{\text{sin. } \pi}{\text{cos. } \pi} = \frac{0}{-1} = -0$ $\qquad \text{cot. } \pi = -\frac{1}{0} = -\infty$

$\text{tg. } (\frac{3}{2}\pi - \varphi) = \frac{\text{sin. } (\frac{3}{2}\pi - \varphi)}{\text{cos. } (\frac{3}{2}\pi - \varphi)} = \frac{-\text{cos. } \varphi}{-\text{sin. } \varphi} = \text{cot. } \varphi$; $\text{cot. } (\frac{3}{2}\pi - \varphi) = \frac{-\text{sin. } \varphi}{-\text{cos. } \varphi} = \text{tg. } \varphi$

$\text{tg. } \frac{3}{2}\pi = \frac{\text{sin. } \frac{3}{2}\pi}{\text{cos. } \frac{3}{2}\pi} = \frac{-1}{0} = -\infty$; $\qquad \text{cot. } \frac{3}{2}\pi = \frac{0}{-1} = -0$

$\text{tg. } (2\pi - \varphi) = \frac{\text{sin. } (2\pi - \varphi)}{\text{cos. } (2\pi - \varphi)} = \frac{-\text{sin. } \varphi}{\text{cos. } \varphi} = -\text{tg. } \varphi$; $\text{cot. } (2\pi - \varphi) = \frac{\text{cos. } \varphi}{-\text{sin. } \varphi} = -\text{cot. } \varphi$

$\text{tg. } 2\pi = \frac{\text{sin. } 2\pi}{\text{cos. } 2\pi} = \frac{0}{1} = 0.$ $\qquad \text{cot. } 2\pi = \frac{1}{0} = \infty.$

21. Такимъ же образомъ найдутся тангенсы и котангенсы угловъ $(\frac{5}{2}\pi - \varphi)$; $\frac{5}{2}\pi$; $3\pi - \varphi$ и проч. и вообще, если

если *n* будетъ означать цѣлое какое ни есть число положительное; то будетъ всегда

$$\mathrm{tg.}\left(\frac{4n+1}{2}\pi-\varphi\right)=\frac{\mathit{sin.}\left(\frac{4n+1}{2}\pi-\Phi\right)}{\mathit{cos.}\left(\frac{4n+1}{2}\pi-\Phi\right)}=\frac{\mathit{cos.}\,\Phi}{\mathit{sin.}\,\Phi}=\mathrm{cot.}\,\varphi;$$

$$\mathrm{tg.}\left(\frac{4n+1}{2}\pi-\varphi\right)=\frac{\mathit{sin.}\,\Phi}{\mathit{cos.}\,\Phi}=\mathrm{tg}\,\varphi;$$

$$\mathrm{tg.}\left(\frac{4n+2}{2}\pi-\varphi\right)=\frac{\mathit{sin.}\left(\frac{4n+2}{2}\pi-\Phi\right)}{\mathit{cos.}\left(\frac{4n+2}{2}\pi-\Phi\right)}=\frac{\mathit{sin.}\,\Phi}{-\mathit{cos.}\,\Phi}=-\mathrm{tg.}\,\varphi;$$

$$\mathrm{cot.}\left(\frac{4n+2}{2}\pi-\varphi\right)=\frac{-\mathit{cos.}\,\Phi}{\mathit{sin.}\,\Phi}=-\mathrm{cot.}\,\varphi.$$

$$\mathrm{tg.}\left(\frac{4n+3}{2}\pi-\varphi\right)=\frac{\mathit{sin.}\left(\frac{4n+3}{2}\pi-\Phi\right)}{\mathit{cos.}\left(\frac{4n+3}{2}\pi-\Phi\right)}=\frac{-\mathit{cos.}\,\Phi}{-\mathit{sin.}\,\Phi}=\mathrm{cot.}\,\varphi;$$

$$\mathrm{cot.}\left(\frac{4n+3}{2}\pi-\varphi\right)=\frac{-\mathit{sin.}\,\Phi}{-\mathit{cos.}\,\Phi}=\mathrm{tg.}\,\varphi.$$

$$\mathrm{tg.}\left(\frac{4n+4}{2}\pi-\varphi\right)=\frac{\mathit{sin.}\left(\frac{4n+4}{2}\pi-\Phi\right)}{\mathit{cos.}\left(\frac{4n+4}{2}\pi-\Phi\right)}=\frac{-\mathit{sin.}\,\Phi}{\mathit{cos.}\,\Phi}=-\mathrm{tg.}\,\varphi;$$

$$\mathrm{cot.}\left(\frac{4n+4}{2}\pi-\varphi\right)=\frac{\mathit{cos.}\,\Phi}{-\mathit{sin.}\,\Phi}=-\mathrm{cot.}\,\varphi$$

22. Изъ сихъ формулъ ясно видѣть можно, что тангенсы отъ 0 град. ростутъ безпрестанно, и при 90° дѣлаются безконечно великими; по томъ уменьшаясь изчезаютъ наконецъ при 180°; откуда опять увеличиваясь дѣлаются при 270° безконечно великими, а при 360° опять изчезаютъ. *Что же касается до котангенсовъ*, то съ ними бываетъ противное; ибо когда тангенсы растутъ, то котангенсы становятся меньше; когда же тангенсы уменьшаются, то котангенсы ростутъ: однимъ словомъ, когда тангенсъ равенъ бываетъ или 0 или ∞, то котангенсъ будетъ тогда равенъ или ∞ или 0. При томъ тангенсы и котангенсы въ 1. 3., 5, 7 и такъ далѣе четверти круга бываютъ положительные, а во 2. 4. 6. 8 и проч. отрицательную величину имѣютъ, или падаютъ по другую сторону діаметра даннаго круга.

23. Что касается до секансовъ, косекансовъ и обращеннаго синуса, то разыскивать ихъ свойства нѣтъ нужды; ибо они въ выкладкахъ Тригонометрическихъ рѣдко употребляются; да при томъ и безъ нихъ обойтись можно, полагая $\frac{1}{\cos\varphi}$ вмѣсто sec. φ; $\frac{1}{\sin.\varphi}$ вмѣсто cosec. φ; $1-\cos.\varphi$ вмѣсто sin. vers. φ. Ежели же кто знать пожелаетъ ихъ перемѣну, тотъ легко до сего можетъ дойти, поставляя только величины вмѣсто sin. φ и cos. φ въ § 8 назначенныя.

24. Синусы, косинусы, тангенсы, котангенсы, секансы и косекансы того же угла, но въ разныхъ кругахъ, содержатся между собою такъ какъ радїусы, коими круги описаны.

Черт. 3. Доказательство: Пусть будетъ предложенный уголъ DAE $=\varphi$ и дуги радїусами AD и Ad описанныя NCD и ncd; протянувъ перпендикуляры CB, cb, DE, de, NG и ng, будутъ CB и cb синусы угла φ; AB и Ab косинусы, DE и de тангенсы, NG и ng котангенсы, AE и Ae секансы и наконецъ AG и Ag косекансы. Но поелику линѣи CB, DE, cb и de параллельны между собою, то произойдетъ:

1е. CB : cb = AC : Ac, (т. е.) синусы содержатся, какъ радїусы.)

2е. AB : Ab = AD : Ad = AC : Ac (т. е.) косинусы содержатся какъ радїусы.

3е. DE : de = AD : Ad = AC : Ac (тангенсы какъ радїусы.)

4е. AE : Ae = AD : Ad = AC : Ac (секансы какъ радїусы.)

По томъ, поелику линѣя NG и ng параллельны между собою, выйдетъ

1е. NG : ng = AN : An = AC : Ac (т. е.) котангенсы содержатся какъ радїусы.

2е. AG : Ag = AN : An = AC : Ac (косекансы какъ радїусы.)

Изъ сего явствуетъ очевидно, что всѣ упомянутыя линѣи, какъ то синусы, косинусы и проч. того же угла, но въ разныхъ кругахъ, содержатся какъ радїусы, коими круги описаны.

25.

25. Изъ сего слѣдуетъ очевидно, что какой бы радїусъ взятъ ни былъ, содержанїе синуса, косинуса и проч. къ радїусу не перемѣняется, и оное какъ въ числахъ, такъ и въ линѣяхъ точно изобразить можно: по сему явствуетъ, что величина радїуса или синуса цѣлаго зависитъ отъ нашего произволенїя. Сїе содержанїе всѣхъ синусовъ къ радїусу или синусу цѣлому составляетъ такъ называемыя таблицы синусовъ, о сочиненїи коихъ ниже сего будетъ говорено.

26. По даннымъ синусу и косинусу угловъ a и b найти синусъ и косинусъ суммы угловъ, или $\sin.(a+b)$ и $\cos.(a+b)$.

Рѣшенїе. Изъ центра C радїусомъ $CO = 1$ опиши дугу круга OAB, на коей возми $OA = a$, и $AB = b$, тогда выйдетъ дуга $OB = a+b$. Потомъ къ CO проведи изъ A перпендикуляръ AP, такъ же изъ B къ CO перпендикуляръ BR, и изъ той же точки къ CA перпендикуляръ BQ. Что сдѣлавъ получимъ $AP = \sin. a$; $CP = \cos. a$; $BQ = \sin. b$; $CQ = \cos. b$; $BR = \sin.(a+b)$ и $CR = \cos.(a+b)$. После сего изъ Q къ CO проведи перпендикуляръ QS и параллельную съ CO линѣю QT; тогда изъ подобїя треугольниковъ CAP и CQS получимъ Черт. 4.

1. $CA : AP = CQ : QS$ или $1 : \sin. a = \cos. b : \sin. a \cos. b$.
2. $CA : CP = CQ : CS$ или $1 : \cos. a = \cos. b : \cos. a \cos. b$.

Слѣд: $QS = \sin. a \cos. b$ и $CS = \cos. a \cos. b$.

Такъ же изъ подобїя треугольниковъ BQT и CAP выйдетъ

1. $CA : AP = BQ : QT$ или $1 : \sin. a = \sin. b : \sin. a \sin. b$.
2. $CA : CP = BQ : BT$ или $1 : \cos. a = \sin. b : \cos. a \sin. b$.

Слѣд. $QT = \sin. a \sin. b$ и $BT = \cos. a \sin. b$.
Опредѣливъ сїи линѣи получимъ $BR = RT + BT$ или $\sin.(a+b) = \sin. a \cos. b + \cos. a \sin. b$. Такъ же $CR = CS - RS$ или для $RS = QT$ получимъ $CR = CS - QT$ слѣдственно выйдетъ $\cos.(a+b) = \cos. a \cos b - \sin. a \sin. b$.

27. Положивъ въ найденныхъ уравненїяхъ $a = b$ выйдетъ $\sin. 2a = 2 \sin. a \cos. a$ и $\cos. 2a = \cos. a^2 - \sin. a^2$.

28. Въ послѣдней формулѣ $\cos a^2 - \sin a^2$ положивъ $1 - \cos. a^2$ вмѣсто $\sin. a^2$. (§. 14) получимъ
$\cos. 2a = 2\cos. a^2 - 1$ откуда $\cos. a = \sqrt{\frac{1+\cos. 2a}{2}}$ или
$\cos. \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1+\cos. a}{2}}$ положивъ $\frac{1}{2}a$ вмѣсто a.

29. Въ сей же самой формулѣ $\cos. a^2 - \sin. a^2$ поставивъ $1 - \sin. a^2$ вмѣсто $\cos. a^2$ выйдетъ $\cos. 2a = 1 - 2\sin. a^2$, откуда $\sin. a = \sqrt{\frac{1-\cos. 2a}{2}}$ или $\sin. \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1-\cos. a}{2}}$ положивъ, какъ и прежде $\frac{1}{2}a$ вмѣсто a.

30. Помноживъ формулы для $\sin. \frac{1}{2}a$ и $\cos. \frac{1}{2}a$ найденныя между собою, получимъ
$\sin. \frac{1}{2}a \cos. \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{(1+\cos. a)(1-\cos. a)}{4}} = \sqrt{\frac{1-\cos. a^2}{4}} = \sqrt{\frac{\sin. a^2}{4}}$
$= \frac{1}{2}\sin. a$, слѣдственно $\sin. a = 2\sin. \frac{1}{2}a \cos. \frac{1}{2}a$.

31. Поелику всегда бываетъ $\text{tg}. \varphi = \frac{\sin. \varphi}{\cos. \varphi}$ и $\cot. \varphi = \frac{\cos. \varphi}{\sin. \varphi}$, то получимъ
$\text{tg}\, \frac{1}{2}a = \frac{\sin. \frac{1}{2}a}{\cos. \frac{1}{2}a} = \sqrt{\frac{1-\cos. a}{1+\cos. a}}$ и $\cot. \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1+\cos. a}{1-\cos. a}}$
Помноживъ первую формулу въ верху и внизу на $\sqrt{1-\cos. a}$, а вторую на $\sqrt{1+\cos. a}$ получимъ
$\text{tg}\, \frac{1}{2}a = \frac{1-\cos. a}{\sqrt{1-\cos. a^2}} = \frac{1-\cos. a}{\sin. a}$ и $\cot. \frac{1}{2}a = \frac{1+\cos. a}{\sqrt{1-\cos. a^2}} = \frac{1+\cos. a}{\sin. a}$

32. Раздѣливъ уравненія $\sin. (a+b)$ и $\cos. (a+b)$ одно на другое, получимъ
$\text{tg}(a+b) = \frac{\sin. a \cos. b + \cos. a \sin. b}{\cos. b \cos. b - \sin. a \sin. b}$. Раздѣливъ съ верху и съ низу на $\cos. a \cos. b$ выйдетъ
$\text{tg}\,(a+b) = \frac{\text{tg} a + \text{tg}\, b}{1 - \text{tg}\, a\, \text{tg}\, b}$; гдѣ положивъ $a = b$ получимъ
$\text{tg}\, 2a = \frac{2\, \text{tg} a}{1 - \text{tg} a^2}$. Положивъ такъ же $b = 2a$ выйдетъ
$\text{tg}\, 3a = \frac{\text{tg}\, a + \text{tg}\, 2a}{1 - \text{tg}\, a\, \text{tg}\, 2a}$; гдѣ вмѣсто $\text{tg}\, 2a$ поставивъ $\frac{2\, \text{tg}\, a}{1 - \text{tg}\, a^2}$ получимъ
$\text{tg}\, 3a = \frac{3\, \text{tg}\, a - \text{tg}\, a^3}{1 - 3\, \text{tg}\, a^2}$. Такимъ же образомъ полагая $b = 3a$; $= 4a$; $= 5a$ и проч. найдутся $\text{tg}\, 4a$; $\text{tg}\, 5a$; $\text{tg}\, 6a$, и такъ далѣе.

33. По даннымъ синусу и косинусу угловъ a и b найти синусъ и косинусъ разности сихъ угловъ или $\sin.\ (a-b)$ и $\cos.\ (a-b)$.

Рѣшенїе: Описавъ дугу круга изъ центра C радїусомъ $CO = 1$ возми на ней $OA = a$ и $AB = b$, тогда будетъ $OB = a - b$. Теперь изъ A къ CO, а изъ B къ CA проведи перпендикуляры AP и BQ, такъ же изъ B къ CO перпендикуляръ BR, тогда получимъ $AP = \sin.\ a$; $CP = \cos.\ a$; $BQ = \sin.\ b$; $CQ = \cos.\ b$; $BR = \sin.\ (a-b)$ и $CR = \cos.\ (a-b)$. Проведши изъ Q къ CO перпендикуляръ QS, а изъ Q къ RB продолженной перпендикуляръ QT, изъ треугольниковъ подобныхъ CAP и CQS получимъ Черт. 5.
1e. $CA : AP = CQ : QS$ или $1 : \sin.\ a = \cos.\ b : \sin.\ a \cos.\ b$
2e. $CA : CP = CQ : CS$ или $1 : \cos.\ a = \cos.\ b : \cos.\ a \cos.\ b$.
Слѣд: $QS = RT = \sin.\ a \cos.\ b$ и $CS = \cos.\ a \cos.\ b$. Потомъ треугольники CAP и BQT подобны между собою, для того, что углы $BQT + BQS = 90°$ и $CQS + BQS = 90°$ слѣдственно $BQT = CQS = CAP$, такъ же уголъ C = углу TBQ и уголъ T = углу P; слѣдственно получимъ
1e. $CA : AP = BQ : RT$ или $1 : \sin.\ a = \sin.\ b : \sin.\ a \sin.\ b$ и
2e. $CA : CP = BQ : BT$ или $1 : \cos.\ a = \sin.\ b : \cos.\ a \sin.\ b$.
Слѣд: $RT = \sin.\ a \sin.\ b$ и $BT = \cos.\ a \sin.\ b$. Но поелику $BR = RT - BT$ и $CR = CS + RS = CS + QT$, то выйдетъ
$\sin.\ (a-b) = \sin.\ a \cos.\ b - \cos.\ a \sin.\ b$ и
$\cos.\ (a-b) = \cos.\ a \cos.\ b + \sin.\ a \sin.\ b$.

34. Положивъ $a = 0$ выйдетъ $\sin. -b = -\sin.\ b$ и $\cos -b = +\cos b$ откуда $tg -b = -tg\ b$. И такъ косинусъ угла отрицательнаго бываетъ всегда положительный, а синусъ и тангенсъ того же угла дѣлаются отрицательными.

35. Положивъ $a = b$ будетъ $\sin.\ 0 = \sin.\ a \cos.\ a - \cos.\ a \sin.\ a = 0$, а $\cos.\ 0 = \cos.\ a^2 + \sin.\ a^2 = 1$, какъ уже видѣли въ §. 14.

36. Поелику $tg.\ \varphi = \frac{\sin.\ \varphi}{\cos.\ \varphi}$, то будетъ

$\mathrm{tg.}\,(a-b) = \frac{\sin.(a-b)}{\cos.(a-b)} = \frac{\sin.\,a\,\cos.\,b - \cos.\,a\,\sin.\,b}{\cos.\,a\,\cos.\,b + \sin.\,a\,\sin.\,b}$. Раздѣливъ сверху и съ низу на $\cos.\,a\,\cos.\,b$ выйдетъ $\mathrm{tg.}\,(a-b) = \frac{\mathrm{tg.}\,a - \mathrm{tg.}\,b}{1 + \mathrm{tg.}\,a\,\mathrm{tg.}\,b}$.

37. Въ §. 26 и 33 нашли мы слѣдующія четыре уравненія:

I. $\sin.\,(a+b) = \sin.\,a\,\cos.\,b + \cos.\,a\,\sin.\,b$.
II. $\sin.\,(a-b) = \sin.\,a\,\cos.\,b - \cos.\,a\,\sin.\,b$.
III. $\cos.\,(a+b) = \cos.\,a\,\cos.\,b - \sin.\,a\,\sin.\,b$.
IV. $\cos.\,(a-b) = \cos.\,a\,\cos.\,b + \sin.\,a\,\sin.\,b$.

Изъ коихъ I. со II. сложенное даетъ $\sin.\,(a+b) + \sin.\,(a-b) = 2\,\sin.\,a\,\cos.\,b$. Но если II. изъ I. вычтешь, то выйдетъ $\sin.\,(a+b) - \sin.\,(a-b) = 2\,\cos.\,a\,\sin.\,b$.

38. Положивъ въ сихъ найденныхъ двухъ уравненіяхъ $a+b=p$ и $a-b=q$, получимъ $a=\frac{p+q}{2}$ и $b=\frac{p-q}{2}$ слѣдственно выйдетъ $\sin.\,p + \sin.\,q = 2\,\sin.\,\frac{p+q}{2}\,\cos.\,\frac{p-q}{2}$ и $\sin.\,p - \sin.\,q = 2\,\cos.\,\frac{p+q}{2}\,\sin.\,\frac{p-q}{2}$.

39. Раздѣливъ $\sin.\,p + \sin.\,q$ на $\sin.\,p - \sin.\,q$, получимъ $\frac{\sin.\,p + \sin.\,q}{\sin.\,p - \sin.\,q} = \frac{2\,\sin.\,\frac{p+q}{2}.\ \cos.\,\frac{p-q}{2}}{2\,\cos.\,\frac{p+q}{2}\ \sin.\,\frac{p-q}{2}}$. Но

$\frac{\sin.\,\frac{p+q}{2}}{\cos.\,\frac{p+q}{2}} = \mathrm{tg.}\,\frac{p+q}{2}$ и $\frac{\cos.\,\frac{p-q}{2}}{\sin.\,\frac{p-q}{2}} = \frac{1}{\mathrm{tg.}\,\frac{p-q}{2}}$. Слѣдственно

$\frac{\sin.\,p + \sin.\,q}{\sin.\,p - \sin.\,q} = \frac{\mathrm{tg.}\,\frac{p+q}{2}}{\mathrm{tg.}\,\frac{p-q}{2}}$; откуда выходитъ слѣдующая пропорція;

$\sin.\,p + \sin.\,q : \sin.\,p - \sin.\,q = \mathrm{tg.}\frac{p+q}{2} : \mathrm{tg.}\frac{p-q}{2}$. По сему, если даны будутъ два угла, то сумма синусовъ содержится всегда къ разности синусовъ, такъ какъ тангенсъ половины суммы данныхъ угловъ къ тангенсу половины разности тѣхъ же самыхъ угловъ.

40. Сложивъ III. уравненїе съ IV. получимъ $\cos.(a+b)+\cos.(a-b)=2\cos.a\cos.b$, гдѣ, какъ и прежде, положивъ $a+b=p$ и $a-b=q$ выйдетъ
$\cos.p+\cos.q=2\cos.\frac{p+q}{2}\cos.\frac{p-q}{2}$.

41. По томъ III. вычти изъ IV, выйдетъ $\cos.(a-b)-\cos.(a+b)=2\sin.a\sin.b$. Положивъ $a+b=p$ и $a-b=q$, получимъ
$\cos.q-\cos.p=2\sin.\frac{p+q}{2}\sin.\frac{p-q}{2}$.

42. Раздѣливъ $\cos.q-\cos.p$ на $\cos.p+\cos.q$, получимъ
$$\frac{\cos.q-\cos.p}{\cos.p+\cos.q}=\frac{2\sin.\frac{p+q}{2}\sin.\frac{p-q}{2}}{2\cos.\frac{p+q}{2}\cos.\frac{p-q}{2}}=tg\frac{p+q}{2}\,tg.\frac{p-q}{2}$$
или $\frac{\cos.q-\cos.p}{\cos.p+\cos.q}=\frac{tg.\frac{p+q}{2}}{cot.\frac{p-q}{2}}$ или $\frac{\cos.p+\cos.q}{\cos.q-\cos.p}=\frac{cot.\frac{p-q}{2}}{tg.\frac{p+q}{2}}=$
$=cot.\frac{p+q}{2}\,cot.\frac{p-q}{2}$.

43. По томъ выйдетъ $\frac{\sin.p+\sin.q}{\cos.q-\cos.p}=\frac{2\sin.\frac{p+q}{2}\cos.\frac{p-q}{2}}{2\sin.\frac{p+q}{2}\sin.\frac{p-q}{2}}=$
$=cot.\frac{p-q}{2}$.

44. Такъ же $\frac{\sin.p-\sin.q}{\cos.p+\cos.q}=\frac{2\cos.\frac{p+q}{2}\sin.\frac{p-q}{2}}{2\cos.\frac{p+q}{2}\cos.\frac{p-q}{2}}=tg.\frac{p-q}{2}$

45. Равнымъ образомъ получимъ
$$\frac{\sin.p-\sin.q}{\cos.q-\cos.p}=\frac{2\cos.\frac{p+q}{2}\sin.\frac{p-q}{2}}{2\sin.\frac{p+q}{2}\sin.\frac{p-q}{2}}=cot.\frac{p+q}{2}$$

46. Наконецъ $\frac{\sin.p+\sin.q}{\cos.p+\cos.q}=\frac{2\sin.\frac{p+q}{2}\cos.\frac{p-q}{2}}{2\cos.\frac{p+q}{2}\cos.\frac{p-q}{2}}=tg.\frac{p+q}{2}$

47. Изъ сихъ найденныхъ формулъ слѣдующїя можно вывести ѳеоремы:

1. $\frac{\sin.p+\sin.q}{\cos.p+\cos.q}=\frac{\cos.q-\cos.p}{\sin.p-\sin.q}$ для того, что $tg\frac{p+q}{2}=\frac{1}{cot.\frac{p+q}{2}}$

2. $\frac{\sin. p+\sin. q}{\sin. p-\sin. q} \cdot \frac{\cos. p+\cos. q}{\cos q-\cos. p} = \left(\cot. \frac{p+q}{2}\right)^2$

3. $\frac{\sin. p+\sin. q}{\sin. p-\sin. q} \cdot \frac{\cos. q-\cos. p}{\cos. p+\cos. q} = \left(\mathrm{tg}\ \frac{p+q}{2}\right)^2$

48. Раздѣливъ I. уравненіе на II. (§ 37), получимъ $\frac{\sin. (a+b)}{\sin. (a-b)} = \frac{\sin. a \cos. b+\cos. a \sin. b}{\sin. a \cos. b-\cos. a \sin. b}$. Раздѣливъ сверху и снизу на coſ. a coſ. b выйдетъ

$\frac{\sin. (a+b)}{\sin. (a-b)} = \frac{\mathrm{tg}\, a + \mathrm{tg}\, b}{\mathrm{tg}\, a - \mathrm{tg}\, b}$.

49. Наконецъ III. уравненіе раздѣливъ на IV выйдетъ $\frac{\cos. (a+b)}{\cos. (a-b)} = \frac{\cos. a \cos. b-\sin. a \sin. b}{\cos. a \cos. b+\sin. a \sin. b}$. Раздѣливъ сверху и снизу на ſin. a coſ. b получимъ

$\frac{\cos. (a+b)}{\cos. (a-b)} = \frac{\cot. a-\mathrm{tg}\, b}{\cot. a+\mathrm{tg}\, b} = \frac{\cot. b-\mathrm{tg}\, a}{\cot. b+\mathrm{tg}\, a}$.

50. Выше сего въ § 28 и 29 нашли мы $\sin. a^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos. 2a$ и $\cos. a^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos. 2a$, откуда весьма легко найти можно ſin. a^3, ſin a^4, ſin a^5 и проч. такъ же coſ. a^3, coſ. a^4, coſ. a^5, и проч. На сей конецъ первую формулу помноживъ на ſin. a получимъ
$\sin. a^3 = \frac{1}{2} \sin. a - \frac{1}{2} \sin. a \cos. 2a$; но
$\sin. a \cos. 2a = \frac{1}{2} \sin. 3a - \frac{1}{2} \sin. a$ (§ 37); слѣд. выйдетъ $\sin. a^3 = \frac{3}{4} \sin. a - \frac{1}{4} \sin. 3a$. Помноживъ теперь ſin. a^3 на ſin. a получимъ $\sin. a^4 = \frac{3}{4} \sin. a - \frac{1}{4} \sin. 3a \sin. a$; но $\sin. 3a \sin. a = \frac{1}{2} \cos. 2a - \frac{1}{2} \cos. 4a$ (§ 41); слѣдственно $\sin. a^4 = \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos. 2a + \frac{1}{8} \cos. 4a$. Такимъ же образомъ найдутся ſin. a^5, ſin. a^6, и такъ далѣе.

51. Дабы найти coſ. a^3, то помноживъ $\cos. a^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos. 2a$ на coſ. a выйдетъ $\cos. a^3 = \frac{1}{2} \cos. a + \frac{1}{2} \cos. 2a \cos. a$; но $\cos. 2a \cos. a = \frac{1}{2} \cos. 3a + \frac{1}{2} \cos. a$ (§ 40) слѣдственно; $\cos. a^3 = \frac{3}{4} \cos. a + \frac{1}{4} \cos. 3a$. Помноживъ теперь coſ. a^3 на coſ. a получимъ $\cos. a^4 = \frac{3}{4} \cos. a^2 + \frac{1}{4} \cos. 3a \cos. a$; но $\cos. a^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos. 2a$ и $\cos. 3a. \cos. a = \frac{1}{2} \cos. 4a + \frac{1}{2} \cos. 2a$ слѣд: $\cos. a^4 = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos. 2a + \frac{1}{8} \cos. 4a$, и такъ далѣе.

52. Тѣ же самыя формулы найдутся для ſin. a^4 и coſ. a^4, если возмутся квадраты отъ ſin. a^2 и coſ. a^2; ибо получимъ $\sin. a^4 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cos. 2a + \frac{1}{4} \cos. 2a^2$ и $\cos. a^4 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cos. 2a + \frac{1}{4} \cos. 2a^2$; но $\cos. 2a^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos. 4a$,

поло-

положивъ въ формулѣ $\text{cos}.\ a^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ \text{cos}.\ 2\,a$ (§ 50) $2\,a$ вмѣсто a; слѣдовательно получимъ, какъ и прежде $\text{sin}.\ a^4 = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\ \text{cos}.\ 2\,a + \frac{1}{8}\ \text{cos}.\ 4\,a$ и $\text{cos}.\ a^4 = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\ \text{cos}.\ 2\,a + \frac{1}{8}\ \text{cos}.\ 4\,a$.

53. По данному синусу и косинусу какого ни есть угла найти синусъ и косинусъ угла въ двое, трое, четверо, и такъ далѣе, большаго.

Рѣшенїе: пусть будетъ предложенный уголъ $A = a$. Между боками сего угла бери безпрестанно $AB = BC = CD = DE = EF$ и проч. $= 1$. тогда углы будутъ точно такїе, какъ въ фигурѣ назначено. По томъ опустивъ перпендикуляры Bb; Cc; Dd; Ee и проч. выйдетъ $Bb = \text{sin}.\ a = a$; $Ab = \text{cos}.\ b = b$; $aa + bb = 1$. и $AC = 2\,b$. Поелику теперь треугольники ACc и ABb подобны между собою, то получимъ Черт. 6.

1 е. $AB : Bb = AC : Cc$ или $1 : a = 2\,b : Cc$; слѣдственно $Cc = 2\,ab = \text{sin}.\ 2\,a$.

2 е. $AB : Ab = AC : Ac$ или $1 : b = 2\,b : Ac$, слѣд: $Ac = 2\,bb$, откуда $BC = 2\,bb - 1 = CD = \text{cos}.\ 2\,a$ и $AD = 4\,bb - 1$. Теперь изъ подобїя треугольниковъ ADd и ABb слѣдуетъ

1 е. $AB : Bb = AD : Dd$ или $1 : a = 4\,bb - 1 : Dd$; слѣд: $Dd = 4\,abb - a = \text{sin}.\ 3\,a$.

2 е. $AB : Ab = AD : Ad$ или $1 : b = 4\,bb - 1 : Ad$ слѣд: $Ad = 4\,b^3 - b$; и $Cd = 4\,b^3 - b - 2\,b = 4\,b^3 - 3b = \text{cos}.\ 3\,a$; откуда $CE = 8\,b^3 - 6\,b$ и $AE = 8\,b^3 - 6\,b + 2b = 8\,b^3 - 4\,b$. По томъ изъ подобїя треугольниковъ ABb и AEe получимъ

1 е. $AB : Bb = AE : Ee$ или $1 : a = 8\,b^3 - 4\,b : Ee$; слѣд: $Ee = 8\,ab^3 - 4\,ab = \text{sin}.\ 4\,a$.

2 е. $AB : Ab = AE : Ae$ или $1 : b = 8\,b^3 - 4\,b : Ae$ слѣд: $Ae = 8\,b^4 - 4\,bb$ и $DE = 8\,b^4 - 8\,bb + 1 = \text{cos}.\ 4\,a$.

Такимъ же образомъ продолжая изчисленїе далѣе, найдемъ синусы и косинусы угловъ $5\,a$, $6\,a$, $7\,a$, и проч.

54. Разсматривая формулы для синусовъ и косинусовъ въ предъидущемъ § найденныя, примѣчаемъ, что ихъ найти можно, если послѣдняя формула помножится на $2\,b$, и изъ произведенїя вычтется предпослѣдней терминъ, какъ

какЪ то изЪ слѣдующаго ясно уразумѣть можно. Положивъ ſin. $a = a$ и coſ. $a = b$, получимЪ

ſin. $0 = 0$	coſ. $0 = 1$
ſin. $a = a$	coſ. $a = b$
ſin. $2a = 2ab - 0$	coſ. $2a = 2bb - 1$
ſin. $3a = 4abb - a$	coſ. $3a = 4b^3 - 3b$
ſin. $4a = 8ab^3 - 4ab$	coſ. $4a = 8b^4 - 8bb + 1$
ſin. $5a = 16ab^3 - 12ab^2 + a$	coſ. $5a = 16b^5 - 20b^3 + 5b$
ſin. $6a = 32ab^4 - 32ab^3 + 6ab$	coſ. $6a = 32b^6 - 48bb^4 + 18b^2 - 1$
и проч.	и проч.

55. Сїи же самыя формулы можно вывести изЪ уравненїй вЪ § 26 найденныхЪ; а имянно
ſin. $(a+b) =$ ſin. a coſ. $b +$ coſ. a ſin. b, и
coſ. $(a+b) =$ coſ. a coſ. $b -$ ſin. a ſin. b;
ибо положивЪ $a = b$ выйдетЪ
ſin. $2a = 2$ ſin. a coſ. a и coſ. $2a =$ coſ. $a^2 -$ ſin. $a^2 = 2$coſ. $a^2 - 1$ (§ 28).

ПоложивЪ $b = 2a$, получимЪ
ſin. $3a =$ ſin. a coſ. $2a +$ coſ. a ſin. $2a$ и coſ. $3a =$ coſ. a coſ. $2a -$ ſin. a ſin. $2a$.

ПоставивЪ теперь вмѣсто ſin. $2a$ и coſ. $2a$ найденныя величины, выйдетЪ
ſin. $3a = 4$ ſin. a coſ. $a^2 -$ ſin. a и coſ. $3a = 2$ coſ. $a^3 -$ coſ. $a - 2$ ſin. a^2 coſ. a но ſin. $a^2 = 1 -$ coſ. a^2; слѣд: coſ. $3a = 4$ coſ. $a^3 - 3$ coſ. a.

ПоложивЪ $b = 3a$, выйдетЪ
ſin. $4a =$ ſin. a coſ. $3a +$ coſ. a ſin. $3a$ и coſ. $4a =$ coſ. a coſ. $3a -$ ſin. a ſin. $3a$.

ПоставивЪ вмѣсто ſin. $3a$ и coſ. $3a$ найденныя величины, получимЪ
ſin. $4a = 8$ ſin. a coſ. $a^3 - 4$ ſin. a coſ. a и coſ. $4a =$ coſ. $4a - 3$ coſ. $a^2 - 4$ ſin. a^2 coſ. $a^2 -$ ſin. a^2.

ПоложивЪ $1 -$ coſ. a^2 вмѣсто ſin. a^2, получимЪ coſ. $4a = 8$ coſ. $a^4 - 8$ coſ. $a^2 + 1$. ТакимЪ же образомЪ можно найти синусы и косинусы угловЪ $5a$, $6a$, $7a$, $8a$, и проч.; а по томЪ положивЪ ſin. $a = a$ и coſ. $a = b$, получимЪ тѣ же самыя формулы, которыя вЪ прежнемЪ § были выведены.

56.

56. Поставимъ теперь вмѣсто a различные углы, какъ то 60°, 45°, 36°, 30°, 12°, и станемъ искать ихъ синусы и косинусы. Положивъ съ начала $a = 60°$ получимъ

$\sin. 60° = a$; $\cos. 60° = b$

$\sin. 120° = 2ab$; $\cos. 120° = 2bb - 1$

$\sin. 180° = 4abb - a$; $\cos. 180° = 4b^3 - 3b$;

но извѣстно, что $\sin. 180° = 0$; слѣд: получимъ $4abb - a = 0$; откуда найдется $b = \cos. 60° = \frac{1}{2}$. Нашедъ b изъ уравненія $aa + bb = 1$. (§. 53), выйдетъ $a = \sin. 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ откуда $\text{tg}. 60° = \sqrt{3}$.

57. Положивъ $a = 45°$, выйдетъ

$\sin. 45° = a$; $\cos. 45° = b$

$\sin. 90° = 2ab$; $\cos. 90° = 2bb - 1$. Но $\cos. 90° = 0$ и $\sin. 90° = 1$. слѣд: $2bb - 1 = 0$ и $2ab = 1$. Изъ перваго уравненія получимъ $b = \sqrt{\frac{1}{2}}$, которую величину поставивъ во второмъ уравненіи выйдетъ $a = \sqrt{\frac{1}{2}}$; слѣд: $\sin. 45° = \cos. 45 = \sqrt{\frac{1}{2}}$; откуда найдется $\text{tg}. 45° = 1$.

58. Положивъ $a = 30°$ выйдетъ

$\sin. 30° = a$; $\cos. 30° = b$

$\sin. 60° = 2ab$; $\cos. 60° = 2bb - 1$

$\sin. 90° = 4abb - a$; $\cos. 90° = 4b^3 - 3b$; но $\cos. 90° = 0$ а $\sin. 90° = 1$. Слѣд: $4b^3 - 3b = 0$ и $4abb - a = 1$. Изъ перваго уравненія выйдетъ $b = \cos. 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, которую величину поставивъ во второмъ уравненіи, найдется $a = \sin. 30° = \frac{1}{2}$; откуда $\text{tg}. 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$

59. Положивъ $a = 36°$, получимъ

$\sin. 36° = a$ $\cos. 36° = b$

$\sin. 72 = 2ab$ $\cos. 72 = 2bb - 1$

$\sin. 108 = 4abb - a$ $\cos. 108 = 4b^3 - 36$. Но

$\sin. 108° = \sin. (180° - 108°) = \sin. 72°$; слѣдовательно $4abb - a = 2ab$ или $4bb = 2b + 1$; откуда $b = \cos. 36° = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$

Но поелику $aa + bb = 1$; то вмѣсто b поставивъ $\frac{1+\sqrt{5}}{4}$, получимъ $a = \sin. 36° = \sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{4}}$

60. Положивъ $a = 12°$ получимъ,

$\sin. 12° = a$ $\cos. 12° = b$

$\sin. 24 = 2ab$ $\cos. 24 = 2bb - 1$

$\sin. 36 = 4abb - a$ $\cos. 36 = 4b^3 - 3b$.

Но поелику $\sin. 36° = \sqrt{\frac{10 - 2\sqrt{5}}{4}}$ и $\cos. 36° = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$; слѣдоват: $4abb - a = \sqrt{\frac{10 - 2\sqrt{5}}{4}}$ и $4b^3 - 3b = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$, или положивъ $b = \frac{p}{4}$, послѣднее уравненїе превратится въ $p^3 - 12p = 4 + 4\sqrt{5}$, откуда p найти не льзя; ибо онъ будетъ не возможенъ. Сего для надлежитъ намъ разрѣшить сей вопросъ другимъ образомъ. Извѣстно уже, что $\sin. 60 = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos. 60 = \frac{1}{2}$; $\sin. 36° = \sqrt{\frac{10 - 2\sqrt{5}}{4}}$ и $\cos. 36° = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$ слѣдственно по §. 26 получимъ $\sin. (60° - 36°) = \sin. 24° = \sin. 60°; \cos. 36° - \cos. 60° \sin. 36°$, или $\sin. 24° = \sqrt{\frac{3(1 + \sqrt{5})}{8}} - \sqrt{\frac{10 - 2\sqrt{5}}{8}}$. Нашедъ такимъ образомъ $\sin. 24°$ по §. 14 найдется $\cos. 24° = \sqrt{1 - \sin. 24°^2}$; а по томъ по §. 29 выйдетъ $\sin. 12° = \sqrt{\frac{1 - \cos. 24°}{2}}$.

61. Симъ образомъ находить можно синусы и косинусы прочихъ угловъ: но надлежитъ примѣчать, что кромѣ найденныхъ нами синусовъ изобразить кратко прочїе весьма трудно, да и не возможно кажется; ибо при всякомъ разрѣшенїи доходить будешь до уравненїй вышшихъ степеней, коихъ разрѣшенїе превосходитъ силы Математиковъ.

ГЛАВА II.

О нахожденїи и употребленїи таблицъ синусовъ.

62. Разсматривая выведенныя выше сего въ §. 9. формулы, примѣчаемъ, что всѣ синусы отъ 0 до 90°, такъ же отъ 90° до 180° и проч. содержатся между 0 и 1, или радїу-

радїусомЪ, или синусомЪ цѣлымЪ; слѣдственно всѣ среднїе синусы между 0 и 90° и проч. будутЪ дроби радїуса; по чему ихЪ не иначе, какЪ чрезЪ десятичныя дроби представить можно. ИзЪ сего слѣдуетЪ, что для нахожденїя синусовЪ надлежитЪ изобразить числами содержанїе ихЪ кЪ синусу цѣлому или точно, или отЪ истиннаго нечувствительно разнящееся, которое содержанїе, какЪ мы уже вЪ §. 25 примѣтили, составляетЪ такЪ называемыя *таблицы синусовЪ*, коихЪ строенїе теперь мы показать намѣрены.

63. Тѣ же самыя формулы показываютЪ намЪ, что мы не имѣемЪ причины продолжать таблицы синусовЪ до безконечности, но довольно сЪ насЪ, когда синусы отЪ 0 до 90° только изчислятся; ибо тѣ, кои будутЪ болѣе 90°, удобно можно опредѣлить: на пр: если потребуется синусЪ угла тупаго, какЪ то 125°, то надлежитЪ его сЪ начала отнять отЪ 180°, а по томЪ разности 55 взять синусЪ, которой вмѣстѣ будетЪ синусЪ угла 125°, для того, что $\sin. (180 - \varphi) = \sin. \varphi$ или углы φ и $180 - \varphi$ общей имѣютЪ синусЪ. РавнымЪ образомЪ, если понадобится найти синусЪ угла на пр: 236°, то по формулѣ $\cos. (\frac{3}{2}\pi - \varphi) = -\sin. \varphi$ выйдетЪ $\cos. (\frac{3}{2}\pi - 236°) = \cos. 34° = -\sin. 236°$. Слѣдственно, взявЪ косинусЪ угла 34° и поставивЪ передЪ нимЪ знакЪ —, получишь синусЪ предложеннаго угла 236. ИзЪ сего слѣдуетЪ очевидно, что хотя синусы отЪ 0 до 90° только изчисляются; однакожЪ синусы всѣхЪ возможныхЪ угловЪ по формуламЪ вЪ §. 9 назначеннымЪ безЪ труда опредѣлить можно будетЪ.

64. ТакЪ же вЪ §. 17, 18 и 19 нашли мы, что $\cos. \varphi. \sec. \varphi = 1$; $\sin. \varphi. \operatorname{cosec}. \varphi = 1$ и $\operatorname{tg} \varphi. \cot. \varphi = 1$ или 1, или радїусЪ, или синусЪ цѣлой есть средняя пропорцїональная линѣя между $\cos. \varphi$ и $\sec. \varphi$, такЪ же между $\sin. \varphi$ и $\operatorname{cosec}. \varphi$ и наконецЪ между $\operatorname{tg} \varphi$ и $\cot. \varphi$. Сего для сїи наименованїя вЪ таблицахЪ синусовЪ такЪ совокупляются:

$$\sin.\ \varphi \ \ldots \ \operatorname{cosec.}\ \varphi$$
$$\operatorname{tg.}\ \varphi \ \ldots \ \operatorname{cot.}\ \varphi$$
$$\sec.\ \varphi \ \ldots \ \cos.\ \varphi$$

которое сопряженіе еще лучше въ логариѳмахъ видѣть можно; ибо выходитъ всегда $l.\ \sin.\ \varphi + l.\ \operatorname{cosec.}\ \varphi = 0$; $l.\ \operatorname{tg}\ \varphi + l.\ \cot.\ \varphi = 0$; $l.\ \sec.\ \varphi + l.\ \cos.\ \varphi = 0$, такъ что $l.\ \sin.\ \varphi = -l.\ \operatorname{cosec.}\ \varphi$; $l.\ \operatorname{tg}\ \varphi = -l.\ \cot.\ \varphi$; $l.\ \sec.\ \varphi = -l.\ \cos.\ \varphi$. Но поелику въ простыхъ выкладкахъ отрицательныя величины избѣгаются; то въ таблицахъ синусовъ всѣхъ логариѳмовъ характеристики 10 увеличиваются; по чему выйдетъ
$l.\ \sin.\ \varphi + l.\ \operatorname{cosec.}\ \varphi = 20$; $l.\ \operatorname{tg}\ \varphi + l.\ \cot.\ \varphi = 20$ и
$l.\ \sec.\ \varphi + l.\ \cos.\ \varphi = 20$.

65. Поелику мы выше сего нашли, что
$\sin.(90^\circ - \varphi) = \cos.\ \varphi$; $\cos.(90 - \varphi) = \sin.\ \varphi$; $\operatorname{tg}(90^\circ - \varphi) = \cot.\ \varphi$
$\cot.(90^\circ - \varphi) = \operatorname{tg}\ \varphi$; $\sec.(90 - \varphi) = \operatorname{cosec.}\ \varphi$ и $\operatorname{cosec.}(90 - \varphi) = \sec.\ \varphi$; то изъ сего ясно уразумѣть можно причину, для чего въ таблицахъ синусовъ верхніе градусы отъ 0° до 45° въ правую сторону простираются, а нижнія въ лѣвую сторону отъ 45° до 90°; такъ же понять можно и то, для чего въ низу находятся дополненія только до прямыхъ, а въ верху самые углы.

66. Равнымъ образомъ нашли мы выше сего слѣдующія формулы: $\sin.\ \varphi = \sqrt{1 - \cos.\ \varphi^2}$; $\cos.\ \varphi = \sqrt{1 - \sin.\ \varphi^2}$; $\sin.\ \frac{1}{2}\varphi = \sqrt{\frac{1 - \cos.\ \Phi}{2}}$; $\cos.\ \frac{1}{2}\varphi = \sqrt{\frac{1 + \cos.\ \Phi}{2}}$; $\sin.\ 45^\circ = \sqrt{\frac{1}{2}}$; $\cos.\ 45^\circ = \sqrt{\frac{1}{2}}$; $\sin.\ 60^\circ = \sqrt{\frac{3}{2}} = \cos.\ 30^\circ$; $\cos.\ 60^\circ = \frac{1}{2} = \sin.\ 30^\circ$; $\sin.\ 36^\circ = \sqrt{\frac{10 - 2\sqrt{5}}{4}}$; $\cos.36^\circ = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$; $\sin.\ 24^\circ = \sqrt{\frac{3(1 + \sqrt{5})}{8}} - \sqrt{\frac{10 - 2\sqrt{5}}{8}}$ и $\cos.\ 24^\circ = \sqrt{1 - \sin.\ 24^{\circ 2}}$; посредствомъ коихъ весьма удобно найдутся таблицы всѣхъ синусовъ, какъ то изъ слѣдующаго ясно уразумѣть можно.

Изъ $\sin.\ 45^\circ = \sqrt{\frac{1}{2}} = \cos.\ 45^\circ$ найдутся седмь синусовъ.

67. По формуламъ $\sin.\ \frac{1}{2}\varphi = \sqrt{\frac{1 - \cos.\ \Phi}{2}}$ и $\cos.\ \frac{1}{2}\varphi = \sqrt{\frac{1 + \cos.\ \Phi}{2}}$ получимъ

$\sin.\ 22^\circ, 30' = \sqrt{\frac{1 - \cos.\ 45^\circ}{2}}$ и $\cos.\ 22^\circ, 30' = \sqrt{\frac{1 + \cos.\ 45^\circ}{2}}$ такъ же

sin.

$\sin. 11^\circ, 15' = \sqrt{\frac{1-\cos. 22^\circ\ 30'}{2}}$ и $\cos. 11^\circ, 15' = \sqrt{\frac{1+\cos. 22^\circ 30'}{2}}$. Но поелику угла $11^\circ, 15'$ болѣе на половины раздѣлить не можно, то по формуламъ $\sin. (90-\varphi) = \cos. \varphi$ и $\cos. (90-\varphi) = \sin. \varphi$ взявъ найденныхъ угловъ дополненія, получимъ $\sin. (90^\circ-22^\circ, 30') = \sin. 67^\circ, 30' = \cos. 22^\circ, 30' = \sqrt{\frac{1+\cos. 45^\circ}{2}}$

$\cos.(90^\circ-22^\circ,30') = \cos. 67^\circ, 30' = \sin. 22^\circ, 30' = \sqrt{\frac{1-\cos. 45^\circ}{2}}$, по томъ

$\sin. (90^\circ-11^\circ, 15') = \sin. 78^\circ, 45' = \cos. 11^\circ, 15' = \sqrt{\frac{1+\cos. 22^\circ, 30'}{2}}$ и

$\cos. (90^\circ-11^\circ\ 15') = \cos. 78^\circ, 45' = \sin. 11^\circ. 15' = \sqrt{\frac{1-\cos. 22^\circ, 30'}{2}}$,

поелику здѣсь найденнаго угла $78^\circ, 45'$ на половины болѣе дѣлить не можно, то взявъ половину угла $67^\circ, 30'$ получимъ

$\sin. 33^\circ, 45' = \sqrt{\frac{1-\cos. 67^\circ, 30'}{2}}$ и $\cos. 33^\circ, 45' = \sqrt{\frac{1+\cos. 67^\circ, 30'}{2}}$,

по томъ $\sin. (90^\circ-33^\circ, 45') = \sin. 56^\circ, 15' = \cos. 33^\circ, 45'$ и $\cos. (90^\circ-33^\circ, 45') = \cos. 56^\circ, 15' = \sin. 33^\circ, 45'$, коего угла половины взять уже болѣе не можно. Слѣдственно изъ синуса 90° найдутся синусы и косинусы слѣдующихъ угловъ: $45^\circ, 0'$; $22^\circ, 30'$; $67^\circ, 30'$; $33^\circ, 45'$; $56^\circ, 15'$; $10^\circ, 15'$; и $78^\circ, 45$.

Изъ $\sin. 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\cos. 60^\circ = \frac{1}{2}$ найдутся 16 синусовъ.

68. Съ самаго начала по формуламъ $\sin. \frac{1}{2}\varphi = \sqrt{\frac{1-\cos. \Phi}{2}}$ и $\cos. \frac{1}{2}\varphi = \sqrt{\frac{1+\cos. \Phi}{2}}$ получимъ

$\sin. 30^\circ = \frac{1}{2}$ и $\cos. 30^\circ = \sqrt{\frac{3}{2}}$

$\sin. 15^\circ = \sqrt{\frac{1-\cos. 30^\circ}{2}}$; $\cos. 15^\circ = \sqrt{\frac{1+\cos. 30^\circ}{2}}$

$\sin. 7^\circ, 30' = \sqrt{\frac{1-\cos. 15^\circ}{2}}$; $\cos. 7^\circ, 30' = \sqrt{\frac{1+\cos. 15^\circ}{2}}$

$\sin. 3^\circ, 45' = \sqrt{\frac{1-\cos. 7^\circ, 30'}{2}}$; $\cos. 3^\circ, 45' = \sqrt{\frac{1+\cos. 7^\circ, 30'}{2}}$.

Поелику угла $3^\circ, 45'$ болѣе на половины дѣлить не можно, то найденныхъ угловъ взявъ дополненія до угла прямаго, изключивъ только углы 60° и $30'$, за тѣмъ, что дополненія ихъ будутъ тѣ же самыя, получимъ

 sin.

$\text{ſin.}\ (90^\circ, -15^\circ) = \text{ſin.}\ 75^\circ = \text{coſ.}\ 15^\circ$; $\text{coſ.}\ (90^\circ - 15^\circ) = \text{coſ.}\ 75^\circ = \text{ſin.}\ 15^\circ$.

$\text{ſin.}\ (90^\circ - 7^\circ, 30') = \text{ſin.}\ 82^\circ, 30' = \text{coſ.}\ 7^\circ, 30$; $\text{coſ.}\ (90^\circ - 7^\circ, 30') = \text{coſ.}\ 82^\circ, 30' = \text{ſin.}\ 7^\circ, 30'$.

$\text{ſin.}\ (90^\circ - 3^\circ, 45') = \text{ſin.}\ 86^\circ, 15' = \text{coſ.}\ 3^\circ, 45'$; $\text{coſ.}\ (90^\circ - 3^\circ, 15') = \text{coſ.}\ 86^\circ, 15' = \text{ſin.}\ 3^\circ\ 45'$.

СинусовЪ найденныхЪ угловЪ 75°; 82°, 30′ взявЪ половины, получимЪ

$\text{ſin.}\ 37^\circ, 30' = \sqrt{\frac{1 - \text{coſ.}\ 75^\circ}{2}}$; $\text{coſ.}\ 37^\circ, 30' = \sqrt{\frac{1 + \text{coſ.}\ 75^\circ}{2}}$

$\text{ſin.}\ 18^\circ, 45' = \sqrt{\frac{1 - \text{coſ.}\ 37^\circ\ 30'}{2}}$; $\text{coſ.}\ 18^\circ, 45' = \sqrt{\frac{1 + \text{coſ.}\ 37^\circ, 30'}{2}}$

$\text{ſin.}\ 41^\circ, 15' = \sqrt{\frac{1 - \text{coſ.}\ 82^\circ, 30'}{2}}$; $\text{coſ.}\ 41^\circ, 15' = \sqrt{\frac{1 + \text{coſ.}\ 82^\circ, 30'}{2}}$,

коихЪ взявЪ дополненія, получимЪ

$\text{ſin.}\ (90^\circ - 37^\circ, 30') = \text{ſin.}\ 52^\circ, 30' = \text{coſ.}\ 37^\circ.\ 30'$;

$\text{coſ.}\ (90^\circ - 37^\circ, 30') = \text{coſ.}\ 52^\circ, 30' = \text{ſin.}\ 37^\circ, 30'$;

$\text{ſin.}\ (90^\circ - 18^\circ, 45') = \text{ſin.}\ 71^\circ, 15' = \text{coſ.}\ 18^\circ, 45'$;

$\text{coſ.}\ (90^\circ - 18^\circ, 45') = \text{coſ.}\ 71^\circ, 15' = \text{ſin.}\ 18^\circ, 45'$;

$\text{ſin.}\ (90^\circ - 41^\circ, 15') = \text{ſin.}\ 48^\circ, 45' = \text{coſ.}\ 41^\circ, 15'$ и

$\text{coſ.}\ (90^\circ - 41^\circ, 15') = \text{coſ.}\ 48^\circ, 45' = \text{ſin.}\ 41^\circ, 15'$.

СинусЪ половины угла 52°, 30′ будетЪ

$\text{ſin.}\ 26^\circ, 15' = \sqrt{\frac{1 - \text{coſ.}\ 52^\circ, 30'}{2}}$ и $\text{coſ.}\ 26^\circ, 15' = \sqrt{\frac{1 + \text{coſ.}\ 52^\circ, 30'}{2}}$,

коего дополненіе будетЪ

$\text{ſin.}\ (90^\circ - 26^\circ, 15') = \text{ſin.}\ 63^\circ, 45' = \text{coſ.}\ 26^\circ, 15'$ и

$\text{coſ.}\ (90^\circ - 26^\circ, 15') = \text{coſ.}\ 63^\circ, 45' = \text{ſin.}\ 26^\circ, 15'$.

И такЪ синусы и косинусы изЪ угла 60° найдутся слѣдующіе:

3°	45′	26°	15′	48°	45′	71°	15′
7	30	30	0	52	30	75	0
15	0	37	30	60	0	82	30
18	45	41	15	63	45	86	15

69. Такимъ же образомъ поступая найдется изъ sin. $36° = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}$ и cos. $36° = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$ слѣдующїе 32 синуса.

2°	15′	24°	45′	49°	30′	72°	0′
4	30	27	0	51	45	74	15
6	45	29	15	54	0	76	30
9	0	31	30	58	30	81	0
13	30	38	0	60	0	83	15
15	45	40	30	63	0	85	30
18	0	42	45	65	15	87	0
20	15	47	15	69	45	36	0

70. Наконецъ изъ синуса 24° найдутся слѣдующїе 64 синуса и косинуса.

0°	45′	23°	15′	45°	45′	68°	15′
1	30	24	0	46	30	69	0
3	0	25	30	48	0	70	30
5	15	27	45	50	15	72	45
6	0	28	30	51	0	73	30
8	15	30	45	53	15	75	45
9	45	32	15	54	45	77	15
10	30	33	0	55	30	78	0
12	0	34	30	57	0	79	30
12	45	35	15	57	45	80	15
14	15	36	45	59	15	81	45
16	30	39	0	61	30	84	0
17	15	39	45	62	15	84	15
19	30	42	0	64	30	87	0
21	0	43	30	66	0	88	30
21	45	44	15	66	45	89	15

71. Если синусы до сихъ поръ найденные приведутся въ порядокъ, то выйдетъ всѣхъ 120, кои всѣ 45 минутами разнятся, и изъ коихъ первой 45 минутъ, а послѣднїй 90 градусовъ, какъ то изъ сей небольшой таблички ясно видѣть можно:

0°.	45′.	3°.	0′.	5°.	15′.	7°.	30′.	9°.	45′.
1.	30.	3.	45.	6.	0.	8.	15.	и проч.	
2.	15.	4.	30.	6.	45.	9.	0.	90.	0.

Но дабы изъ сихъ 120 синусовъ найти прочїе, то слѣдующую надлежитъ принять въ помощь задачу:

72. По даннымъ синусамъ ZX и FR двухъ дугъ ZB и FB, коихъ разность не болѣе 45 минутъ, найти синусъ IS средней какой ниесть дуги.

Рѣшенїе: Проведи перпендикуляръ FOQ, тогда будутъ ZQ и IO разности синусовъ ZX и IS въ разсужденїи синуса FR; и поелику дуга ZF не болѣе 45 минутъ, слѣд: она мала; то дуги ZF и IF чувствительно не будутъ разниться отъ прямыхъ линѣй, и слѣд: ZFQ и IOF можно почесть за прямолинѣйные треугольники. И такъ поелику IO
Черт: 7. параллельна съ ZQ, то выйдетъ $ZF : IF = ZQ : IO$, откуда $IO = \frac{IF \cdot ZQ}{ZF}$. По сему для нахожденїя синуса средней дуги должно разность средней дуги и меньшой IF помножить на разность данныхъ синусовъ, и произведенїе раздѣлить на разность дугъ, частное оттуда произшедшее число придать къ меньшему данному синусу FR; тогда выйдетъ искомый среднїй синусъ IS.

73. Посредствомъ сея задачи ищи сперва между каждыми изъ 120 синусовъ два среднїе двухъ дугъ 15′ разнящихся, кои присовокупивъ къ прежнимъ получишь синусы разнящїеся только 15 минутами. По томъ между каждыми уже найденными ищи два среднїе 5 минутами разнящїеся, а наконецъ между каждыми ищи опять среднїя четырехъ дугъ имѣющихъ разность въ 1 минуту, кои придавъ къ прежнимъ, получишь 5400 синусовъ; то есть всѣ синусы одною только минутою разнящїеся.

74. Нашедъ такимъ образомъ всѣ синусы и косинусы, можно весьма удобно найти прочїя Тригонометрическїя линѣи, какъ то тангенсы, котангенсы, секансы и косекансы: ибо всегда бываетъ, какъ уже прежде видѣли,

tg

$tg.\ \varphi = \frac{sin.\ \Phi}{cos.\ \Phi}$; $cot.\ \varphi = \frac{1}{tg\ \Phi} = \frac{cos.\ \Phi}{sin.\ \Phi}$; $sec.\ \varphi = \frac{1}{cos.\ \Phi}$ и $cosec.\ \varphi = \frac{1}{sin.\ \Phi}$.

75. Показавъ строенїе таблицъ синусовъ надлежитъ при семъ случаѣ примѣтить, что всѣ линѣи Тригонометрическїя изображаются чрезъ десятичныя дроби (§ 62) и слѣдственно при ихъ логариѳмахъ произойдутъ числа отрицательныя (чему доказательство и основанїе показано въ Универсальной Ариѳметикѣ г. Ейлера части I. въ § 250 и 251), для избѣжанїя коихъ цѣлое число или характеристика 10 ю увеличивается; такъ не должно заключать, что соотвѣтствующее число состоитъ изъ 10, 9, 8, и такъ далѣе, знаковъ, если характеристика будетъ 9, или 8, или 7, и проч.; но что число стоитъ позади запятой на первомъ мѣстѣ, когда съ начала логариѳма стоитъ 9, или на второмъ, если 8, или на третьемъ, когда характеристика будетъ 7. На примѣръ: если возмется изъ таблицъ $l.\ sin.\ 2' = 6.\ 7647561$, то найдется $sin.\ 2' = 0.\ 0005818$, и проч. И такъ при употребленїи таблицъ синусовъ надлежитъ смотрѣть на характеристику логариѳмовъ и къ синусамъ, кои въ таблицахъ обыкновенно цѣлыми представляются числами, прибавлять отъ правой руки къ лѣвой столько нулей, сколько требуетъ показанное въ семъ §. правило уничтожающее числа отрицательныя. Сїе же самое должно наблюдать и при исканїи чиселъ найденному логариѳму соотвѣтствующихъ.

76. Кто такїя таблицы синусовъ имѣетъ при себѣ, и разположенїе ихъ понялъ, тотъ легко найдетъ каждую Тригонометрическую линѣю, и слѣд: такъ же ея логариѳмъ, если уголъ данъ будетъ въ градусахъ и минутахъ, и обратно: если же Тригонометрическая линея или логариѳмъ оныя будетъ данъ, и потребуется сыскать уголъ соотвѣтствующїй, то въ такомъ случаѣ ищи тригонометрическую линѣю въ таблицахъ подъ тѣмъ же названїемъ, или вмѣсто того данной логариѳмъ въ логариѳмахъ линѣй того же наименованїя; тогда данное число или логариѳмъ дѣйствительно тамъ найдется, если со-

 отвѣт-

отвѣтствующій уголъ содержитъ въ себѣ только градусы и минуты, секундъ же и другихъ малѣйшихъ частей въ себѣ не имѣетъ. Въ первомъ случаѣ удобно назначить можно градусы и минуты въ искомомъ углѣ содержащіеся.

77. Но если потребуются Тригонометрическія линѣи или логариѳмы для такихъ угловъ, кои сверхъ градусовъ и минутъ содержатъ въ себѣ еще секунды; то при употребленіи таблицъ наблюдаютъ слѣдующее правило: *Разности не только линѣй Тригонометрическихъ, но и ихъ логариѳмовъ пропорціональны суть разностямъ соотвѣтствующихъ угловъ.* Сіе самое правило употребляютъ такъ же и тогда, когда по данной Тригонометрической линѣи, или логариѳму въ таблицахъ точно не находящемуся, потребуется сыскать уголъ соотвѣтствующій. Въ обоихъ случаяхъ надлежитъ взять два числа или логариѳма одинакаго названія, кои одною только минутою разнятся, и изъ коихъ одно больше, а другое меньше, нежели данной уголъ, или число, или логариѳмъ; что сдѣлавъ вычти одно изъ другаго, и употребивъ предложенное правило найдется искомое, какъ то изъ слѣдующихъ примѣровъ ясно уразумѣть можно. Дабы данному углу 53°, 28′, 54″ сыскать логариѳмъ Тригонометрической линѣи, то возми

l. ſin. 53°. 29′ = 9, 9050852
l. ſin. 53. 28 = 9. 9049916

Разность - - - - 936; по томъ посылай

60″ : 936 = 54″ : 842 и такъ къ *l.* ſin. 53°, 28′ придавъ 842, получишь *l.* ſin. 53°. 28′. 54″ = 9. 9050758. По томъ

l. tg. 53°. 29′ = 10. 1305269
l. tg. 53. 28 = 10. 1302628

Разность - - - - 2641; слѣд:

60″ : 2641 = 54″ : 2377; придавъ 2377 къ *l.* tg. 53 . 28′, получимъ *l.* tg. 53°. 28′. 54″ = 10. 1305005. Послѣ сего

l. coſ. 53°. 28′ = 9. 7747288
l. coſ. 53°. 29′ = 9. 7745583.

Разность - - - - 1705; слѣд:

60″ :

$60'' : 1705 = 54'' : 1534$; и такъ отъ $l.$ coſ. $53^\circ.\ 28'$ вычти 1534, останется $l.$ coſ. $53^\circ.\ 29'.\ 54'' = 9.\ 7745754$. На конецъ

$l.$ cot. $53^\circ.\ 28' = 9.\ 8697372$
$l.$ cot. $53^\circ.\ 29' = 9.\ 8694731$.

Разность - - - - 2641; слѣд:
$60'' : 2641 = 54'' : 2376$ и такъ отъ $l.$ cot. $53^\circ.\ 28'$ вычти 2376, останется
$l.$ cot. $53^\circ.\ 28'.\ 54'' = 9.\ 8694996$.

Однимъ словомъ: найденное четвертое пропорціональное число тогда вычитать должно, когда логариѳмъ или число Тригонометрической линѣи большаго угла будетъ менѣе логариѳма или числа угла меньшаго; въ противномъ же случаѣ всегда придавать оное надобно.

78. Находятся полныя таблицы синусовъ, гдѣ разности каждыхъ логариѳмовъ назначены, дабы не имѣть труда находить ихъ во всякомъ особенномъ случаѣ. Тѣ же самыя разности потребны и тогда, когда по данному логариѳму Тригонометрической линѣи надлежитъ сыскать уголъ соотвѣтствующій; на примѣръ: пусть данъ будетъ $l.$ ſin. $\alpha = 9.\ 9426938$, и ищи α. Тогда получимъ

$l.$ ſin. $61^\circ.\ 13' = 9.\ 9427255$	$l.$ ſin. $\alpha = 9.\ 9426938$
$l.$ ſin. $61^\circ.\ 12' = 9.\ 9426561$	$l.$ ſin. $61^\circ.\ 12' = 9.\ 9426561$
Разность - - - - 694	Разность - - - - 377;

что сдѣлавъ посылай $694 : 60'' = 377 : 32''$; слѣд: $\alpha = 61^\circ\ 12'.\ 32''$.

Пусть будетъ данъ $l.$ tg. $\alpha = 10.\ 1948376$, тогда поступай такъ:

$l.$ tg. $57^\circ.\ 27' = 10.\ 1949767$	$l.$ tg. $\alpha = 10.\ 1948376$
$l.$ tg. $57^\circ.\ 26' = 10.\ 1946981$	$l.$ tg. $57^\circ.\ 26' = 10.\ 1946981$
Разность - - - - 2786	Разность - - - - 1395

что сдѣлавъ посылай $2786 : 60'' = 1395 : 30''$; слѣд: $\alpha = 57^\circ.\ 26'.\ 30''$.

Пусть будетъ данъ $l.$ coſ. $\alpha = 9.\ 8807837$, тогда надлежитъ поступить такъ:

$l.\ co\text{ſ}.\ 40^{\circ}.\ 32' = 9.8808296$	$l.\ co\text{ſ}.\ \alpha = 9.8807837$
$l.\ co\text{ſ}.\ 40^{\circ}.\ 33' = 9.8807215$	$l.\ co\text{ſ}.\ 40^{\circ}.\ 33' = 9.8807215$
Разность - - - - - 1081	Разность - - - - - 622

что сдѣлавъ посылай $1081 : 60'' = 622 : 34''$ слѣд: $\alpha = 40^{\circ}.\ 32'.\ 26''$.

Пусть будетъ на конецъ данъ $l.\ cot.\ \alpha = 9.8225385$, тогда выйдетъ

$l.\ cot.\ 56^{\circ}.\ 24' = 9.8224286$	$l.\ cot.\ \alpha = 9.8225385$
$l.\ cot.\ 56^{\circ}.\ 24' = 9.8221545$	$l.\ cot.\ 56^{\circ}.\ 24' = 9.8224286$
Разность - - - - - 2741	Разность - - - - - 1099

что сдѣлавъ, посылай $2741 : 60'' = 1099 : 24''$; слѣд: $\alpha = 56^{\circ}.\ 23'.\ 36''$. Здѣсь то же самое примѣчать должно, что мы при концѣ предъидущаго § примѣтили, а имянно, при синусахъ и тангенсахъ придавать, а при косинусахъ и котангенсахъ вычитать надобно секунды изъ угла содержащаго въ себѣ градусы и минуты.

ГЛАВА III.

О разрѣшенїи треугольниковъ.

79. Всякой треугольникъ составляютъ шесть частей, коими опредѣляются три бока и три угла. Изъ Геометрїи явствуетъ, что три части треугольника даны быть должны, чтобы можно было написать треугольникъ, а имянно, 1е двѣ стороны и уголъ между ими содержащїйся; 2е два угла и сторона, при которой упомянутые углы находятся; 3е всѣ три стороны, и 4е два бока въ прямоугольномъ треугольникѣ уголъ острой заключающїе: слѣдственно три части треугольника даны быть должны, чтобъ найти прочїя его части. При семъ надлежитъ примѣчать, что когда будутъ даны всѣ три угла, то боковъ его опредѣлить не можно; ибо треугольники равные углы имѣющїе хотя и будутъ по-

подобны, и ограничены боками пропорцїональными, однако сколь велики должны быть бока, опредѣлить не можно: слѣдовательно, между данными тремя частями неотмѣнно одинъ бокъ быть долженъ. Сверхъ сего, когда два угла будутъ даны, то не надобно, чтобъ третїй данъ былъ, по тому что онъ самъ собою будетъ извѣстенъ: по сему, когда даны только три угла, не можно почитать, какъ только двѣ данныя части треугольника. Такъ же, если въ прямоугольномъ треугольникѣ двѣ части даны будутъ, то къ даннымъ причислять должно всегда прямой уголъ, который довольно извѣстенъ, и по названїи прямоугольнаго треугольника всегда его подразумѣвать надобно. Упомянувъ о семъ, приступимъ теперь къ разрѣшенїю самыхъ треугольниковъ.

80. *Во всякомъ прямоугольномъ треугольникѣ ABC въ разсужденїи угла BAC $= \varphi$ слѣдующїя примѣчать должно опредѣленїя.* Черт. 8.

1. $\sin.\ \varphi = \frac{BC}{AC}$; 2. $\cos.\ \varphi = \frac{AB}{AC}$

3. $tg.\ \varphi = \frac{BC}{AB}$; 4. $\cot.\ \varphi = \frac{AB}{BC}$

5. $\sec.\ \varphi = \frac{AC}{AB}$; 6. $\operatorname{cosec.} \varphi = \frac{AC}{BC}$

Доказательство: Опиши изъ A радїусомъ $Ab = 1$ четверть круга dbf, по томъ проведи перпендикуляръ bc и касательныя линѣи de и fG; тогда для подобїя треугольниковъ ABC и Acb выйдутъ слѣдующїя пропорцїи:

1. $AB : AC = Ab : Ac = \cos.\ \varphi : 1$; откуда $\cos.\ \varphi = \frac{AB}{AC}$

2. $BC : AC = bc : Ac = \sin.\ \varphi : 1$; откуда $\sin.\ \varphi = \frac{BC}{AC}$

по томъ изъ подобїя треугольниковъ ABC и ADe слѣдуетъ

1. $AB : BC = Ad : de = 1 : tg.\ \varphi$; откуда $tg.\ \varphi = \frac{BC}{AB}$

2. $AB : AC = Ad : Ae = 1 : \sec.\ \varphi$; откуда $\sec.\ \varphi = \frac{AC}{AB}$

На конецъ изъ подобїя треугольниковъ ABC и GfA получимъ:

1. $AB : BC = fG : Af = \cot.\ \varphi : 1$; откуда $\cot.\ \varphi = \frac{AB}{BC}$

2. BC: AC $=$ Af: AG $=$ 1: coſec. φ; откуда coſec. $\varphi = \frac{AC}{BC}$.

81. Посредствомъ сея теоремы можно разрѣшить всѣ возможные вопросы касающїеся до разрѣшенїя прямоугольныхъ треугольниковъ, ибо по даннымъ двумъ частямъ всегда можно находить третїю; на примѣръ: ежели въ прямоугольномъ Δкѣ дана гипотенуза AB $= c$ вмѣстѣ съ угломъ φ, то прочїя части найдутся слѣдующимъ образомъ: поелику ſin. $\varphi = \frac{BC}{c}$, то будетъ BC $= c$. ſin. φ; такъ же для coſ. $\varphi = \frac{AC}{c}$ найдется AC $= c$. coſ. φ; откуда по логариѳмамъ удобно назначить можно бока AC и BC, ибо будетъ l. BC $= l. c + l$. ſin. φ и l. AC $= l. c + l$. coſ. φ.

82. Поелику BC $= c$ ſin. φ и AC $= c$. coſ. φ, то будетъ BC$^2 = cc$ ſin. φ^2 и AC$^2 = cc$. coſ. φ^2; откуда получимъ AC^2 + BC$^2 = cc$. coſ. $\varphi^2 + cc$ ſin. $\varphi^2 = cc$ (coſ. φ^2 + ſin. φ^2); но coſ. φ^2 + ſin. $\varphi^2 = 1$. (§ 14), слѣд: выйдетъ AC^2 + BC$^2 = cc =$ AB^2, то есть теорема Пиѳагорова.

83. *Во всякомъ треугольникѣ бока содержатся между собою такъ, какъ синусы угловъ бокамъ противолежащихъ.*
Черт. 9. *Доказательство*: Опустивъ перпендикуляръ CP, и положивъ уголъ BAC $= \varphi$, ABC $= \gamma$ и ACB $= \delta$ изъ треугольника прямоугольнаго ACP, получимъ ſin. $\varphi = \frac{CP}{AC}$, откуда CP $=$ AC. ſin. φ. Равнымъ образомъ изъ треугольника прямоугольнаго CPB выйдетъ CP $=$ CB. ſin. γ; слѣдственно получимъ AC. ſin. $\varphi =$ CB. ſin. γ, откуда слѣдующая произойдетъ пропорцїя: AC: CB $=$ ſin. γ: ſin. φ; такъ же получимъ AC: AB $=$ ſin. γ: ſin. δ и CB: AB $=$ ſin. φ: ſin. δ, опустивъ только перпендикуляръ или изъ точки A, или изъ точки B; слѣд: бока содержатся какъ синусы угловъ бокамъ противолежащихъ.

84. Поелику перпендикуляръ CP $=$ AC. ſin. φ, то отсюда назначить можно площадь самаго треугольника, которая и будетъ $= \frac{1}{2}$ AB. AC. ſin. φ. И такъ по даннымъ двумъ бокамъ AB и AC и угла между ими содержащагося φ найдется площадь $= \frac{1}{2}$ AB. AC. ſin. φ. Но если уголъ φ будетъ прямой, то для ſin $\varphi = 1$ площадь, какъ уже извѣ-

извѣстно изъ Геометрїи, будетъ $= \frac{1}{2}$ AB. AC. Если же самая площадь будетъ извѣстна, и положится $= bb$, то получимъ $\frac{1}{2}$ AB. AC. ſin. $\varphi = bb$, откуда изъ трехъ данныхъ четвертое всегда опредѣлить можно.

85. Посредствомъ задачи въ § 82 предложенной удобно доказать можно то, что углы тупой и острой одинакой имѣютъ синусъ. На сей конецъ въ данномъ тупоугольномъ треугольникѣ ABC протянувъ изъ точки C на продолженное основанїе AB перпендикуляръ CD, изъ треугольниковъ ACB и ACD получимъ слѣдующїя двѣ пропорцїи: 1. AC : CB = ſin. ABC : ſin. A и 2. AC : CD = 1 : (ſin. D) : ſin. A, изъ коихъ слѣдуетъ CD: CB = ſin. ABC : 1. Но изъ треугольника CBD выходитъ Черт. 10.
CD : CB = ſin. CBD : 1; слѣд:
ſin. ABC: 1 = ſin. CBD: 1; откуда слѣдуетъ очевидно, что ſin. ABC = ſin. CBD или что углы тупой и острой одинакой имѣютъ синусъ. Сїе самое подтверждаетъ то, что выше сего въ § 6. сказано было.

86. *Изъ данныхъ двухъ боковъ треугольника* AC $= a$ *и* AB $= b$ *и угла между ими содержащагося* BAC $= \varphi$ *найти третей бокъ и углы.* Черт. 9.

Рѣшенїе. Изъ угла C опустивъ перпендикуляръ CP, изъ треугольника прямоугольнаго ACP получимъ CP $= a$ ſin. φ и AP $= a$ coſ. φ; откуда выйдетъ BP $= b - a$ coſ. φ. Теперь изъ треугольника прямоугольнаго CPB получимъ $CB^2 = CP^2 + BP^2 = aa \sin. \varphi^2 + bb - 2ab \cos. \varphi + aa \cos. \varphi^2$, или $CB^2 = aa (\sin. \varphi^2 + \cos. \varphi^2) + bb - 2ab \cos. \varphi$; но $\sin. \varphi^2 + \cos. \varphi^2 = 1$ (§ 14) слѣд:
$CB^2 = aa + bb - 2ab \cos. \varphi$ или $CB = \sqrt{aa + bb - 2ab \cos. \varphi}$
Нашедъ CB найдутся удобно самые углы B и C; ибо по § 82 получимъ ſin. φ : BC = ſin. B: a, откуда ſin. B $= \frac{a \sin. \varphi}{BC}$, такъ же ſin. φ : BC = ſin. C : b, откуда ſin. C $= \frac{b \sin. \varphi}{BC}$.

87. Положивъ $a = b$ получимъ
$CB = \sqrt{2aa - 2aa \cos. \varphi} = a\sqrt{2(1 - \cos. \varphi)}$. Но

$1 - \cos. \phi = 2 \sin. \frac{1}{2} \phi^2$ (§ 29) слѣд: $CB = 2 a \sin. \frac{1}{2} \phi$. Если уголъ ϕ будетъ прямой, то для $\sin. \phi = 1$ и $\cos. \phi = 0$ выйдетъ, какъ уже извѣстно изъ Геометріи, $CB = \sqrt{aa + bb}$, такъ же $\sin. B = \frac{a}{CB} = \frac{a}{\sqrt{aa+bb}}$; и $\sin. C = \frac{b}{\sqrt{aa+bb}}$. Но если уголъ ϕ будетъ болѣе 90°, то для $\sin. (180° - \phi) = \sin. \phi$ и $\cos. (180° - \phi) = - \cos. \phi$ (§ 9) получимъ $CB = \sqrt{aa + bb + 2ab \cos. \phi}$, такъ же $\sin. B = \frac{a \sin. \phi}{CB}$ и $\sin. C = \frac{b \sin. \phi}{CB}$. Если же уголъ ϕ будетъ менѣе 90°, то выйдетъ, какъ уже видѣли, $CB = \sqrt{aa + bb - 2ab \cos. \phi}$.

Другое рѣшеніе.

88. Назвавъ углы неизвѣстные $ACB = p$ и $ABC = q$, выйдетъ $a : b = \sin. p : \sin. q$; откуда получимъ $a + b : a - b = \sin. p + \sin. q : \sin. p - \sin. q$; но $\sin. p + \sin. q : \sin. p - \sin. q = \text{tg.} \frac{p+q}{2} : \text{tg.} \frac{p-q}{2}$ (§ 39); слѣд: выйдетъ $a + b : a - b = \text{tg.} \frac{p+q}{2} : \text{tg.} \frac{p-q}{2}$, гдѣ $\frac{p+q}{2}$ извѣстно; слѣд: опредѣлится изъ сей пропорціи полуразность $\frac{p-q}{2}$, которую придавъ къ полусуммѣ $\frac{p+q}{2}$ получишъ p; если же вычтешъ оную, то найдешъ q; откуда уже по § 82 весьма легко опредѣлить можно третей бокъ CB.

89. *Изъ данныхъ трехъ боковъ* a, b *и* $BC = c$ *найти углы.*

Рѣшеніе: Поелику мы прежде въ § 86 нашли $cc = aa + bb - 2 ab \cos. \phi$; то вычти съ обѣихъ сторонъ cc и придай $2 ab \cos. \phi$, тогда получимъ $2 ab \cos. \phi = aa + bb - cc$. Раздѣливъ теперь на $2 ab$ выйдетъ $\cos. \phi = \frac{aa + bb - cc}{2 ab}$. Нашедъ такимъ образомъ $\cos. \phi$, найдется удобно и самой уголъ ϕ, откуда уже безъ труда опредѣлить можно и прочіе углы.

90. Положивъ для примѣра $a = 2$; $b = 3$ и $c = 4$, выйдетъ $\cos. \phi = \frac{13 - 16}{12} = - \frac{1}{4}$; изъ сего познаемъ, что уголъ ϕ будетъ тупой. Но дабы его найти, то ищи уголъ, коего синусъ $= \frac{1}{4} = 0,25$, и которой будучи сложенъ

съ 90° даетъ искомой уголъ тупой φ. На сей конецъ положимъ тотъ уголъ, которой надлежитъ придать къ 90°, равенъ α, такъ, чтобы вышло $\sin.\ \alpha = \frac{1}{4} = 0.25$; поелику $l.\ \sin.\ \alpha = l\ 1 - l\ 4 = l\ 0.25 = 9.3979400$, которому въ таблицахъ синусовъ соотвѣтствуетъ уголъ $\alpha = 14°, 28', 30''$; слѣдовательно уголъ $\varphi = 104°, 28', 30''$. Нашедъ уголъ φ, найдутся и прочїе углы по формуламъ $\cos.\ B = \frac{20-9}{16} = \frac{11}{16}$ и $\cos.\ C = \frac{25-4}{24} = \frac{7}{8}$; а имянно, $B = 46°, 34', 0''$; и $C = 28°, 57', 18''$ или по предложенной въ § 82 теоремѣ.

90. *Изъ данныхъ трехъ боковъ* **a**, **b** *и* **c** *опредѣлить площадь треугольника.*

Рѣшенїе: Поелику мы прежде нашли $\cos.\ \varphi = \frac{aa+bb-cc}{2ab}$, то будетъ

$$1 + \cos.\ \varphi = \frac{2ab+aa+bb-cc}{2ab} = \frac{(a+b)^2-cc}{2ab} = \frac{(a+b+c)(a+b-c)}{2ab}$$ и

$$1 - \cos.\ \varphi = \frac{2ab-aa-bb+cc}{2ab} = \frac{-(a-b)^2+cc}{2ab} = \frac{(a-b+c)(-a+b+c)}{2ab}$$

откуда выйдетъ $(1+\cos.\ \varphi)(1-\cos.\ \varphi) = 1-\cos.\varphi^2 = \sin.\varphi^2 = \frac{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}{4\ aabb}$ или

$\sin.\ \varphi = \frac{1}{ab}\sqrt{\frac{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}{4}}$. Но поелику площадь треугольника $= \frac{1}{2}ab\sin.\ \varphi$. (§ 83); то будетъ искомая площадь $= \sqrt{\frac{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}{16}} = \sqrt{\frac{a+b+c}{2}.\frac{a+b-c}{2}.\frac{a-b+c}{2}.\frac{-a+b+c}{2}}$ Положивъ теперь $\frac{a+b+c}{2} = s$, выйдетъ $\frac{a+b-c}{2} = s-c$; $\frac{a-b+c}{2} = s-b$; $\frac{-a+b+c}{2} = s-a$; слѣд: получимъ площадь $= \sqrt{s.s-a.s-b.s-c}$. Изъ сего слѣдуетъ, что ежели даны будутъ всѣ три бока, то для нахожденїя площади треугольника надлежитъ взять полусумму всѣхъ боковъ; по томъ изъ сей полусуммы вычесть каждой бокъ порознь; наконецъ какъ самую полусумму, такъ и разности между собою помножить, и изъ произведенїя извлечь корень квадратной, которой и будетъ искомая площадь треугольника.



91. Положивъ $a = b = c$ выйдетъ площадь равносторонняго треугольника $= \frac{1}{4}aa\sqrt{3}$. Ежели будетъ $a = b$, то площадь равнобедреннаго треугольника выйдетъ $= \frac{1}{4}c\sqrt{4aa - cc}$.

92. *Изъ данныхъ двухъ боковъ* AC *и* AB *и угла которому нибудь изъ данныхъ боковъ противолежащаго опредѣлить другїя части треугольника.*

Рѣшенїе: Если сверхъ боковъ AC и AB извѣстенъ будетъ уголъ B, то между сими боками и синусами противолежащихъ угловъ слѣдующая выйдетъ пропорцїя: AC: AB = ſin. B: ſin. C, откуда найдется уголъ C, которой можетъ быть тупой, или острой, когда бокъ сему углу противолежащїй будетъ больше или меньше другаго. Между тѣмъ, когда уголъ B будетъ тупой или острой, то извѣстно, что уголъ C неотмѣнно долженъ быть острой; но если B острой уголъ, и при томъ AC $>$ AB, то C будетъ такъ же уголъ острой; ибо иначе надлежало бы быть AB $>$ AC. И такъ сомнительно бываетъ только тогда, когда B уголъ острой и при томъ AB $>$ AC. Но при употребленїи правилъ на самомъ дѣлѣ извѣстна бываетъ уже напередъ нѣкоторымъ образомъ величина искомаго угла; слѣдственно сомнѣнїе сїе по большей части отвращается. Нашедъ же уголъ C найдется и уголъ A, а по томъ опредѣлится и бокъ CB посредствомъ пропорцїи AC: CB = ſin. B : ſin. A.

93. *Изъ данныхъ двухъ угловъ* A *и* B *и стороны* AB, *при которой находятся упомянутые углы, опредѣлить прочїя части треугольника.*

Рѣшенїе: Поелику синусы угловъ бокамъ противолежащихъ бываютъ пропорцїональны, то будетъ ſin. A : ſin. C = CB : AB, откуда найдется $CB = \frac{AB.\ \sin.\ A}{CB}$. Нашедъ CB найдется AC посылая, ſin. A : ſin. B = CB : AC слѣд: $AC = \frac{CB.\ \sin.\ B}{\sin.\ A}$. ч. н. н.

Раз-

Разныя задачи.

94. *По данной площади прямоугольнаго треугольника* ABC$=bb$ *вмѣстѣ съ угломъ* ACB$=\gamma$ *найти бока* AB и BC. Черт. 8.

Рѣшеніе: Положивъ AB$=x$, выйдетъ слѣдующая пропорція: $\sin.\gamma : x = \cos.\gamma :$ BC, откуда BC$=\frac{x\cos.\gamma}{\sin.\gamma}=x\cot.\gamma$. Слѣд: площадь треугольника ABC будетъ $=\frac{1}{2}xx\cot.\gamma$, которая должна быть равна bb, слѣд: получимъ $bb = \frac{1}{2}xx\cot.\gamma$; откуда $xx=\frac{2bb}{\cot.\gamma}$ и $x=b\sqrt{\frac{2}{\cot.\gamma}}=b\sqrt{2\,\text{tg}.\gamma}$ (§ 19) = AB. Но поелику BC $=x\cot.\gamma$, то выйдетъ BC$=b\cot.\gamma\sqrt{2\,\text{tg}.\gamma}=b\sqrt{2\,\text{tg}.\gamma\cot.\gamma^2}$, но $\text{tg}.\gamma\cot.\gamma=1$ (§ 19), то получимъ BC$=b\sqrt{2\cot.\gamma}$.
Изъ сего слѣдуетъ очевидно, какимъ образомъ находить должно бока AB и BC по данной площади bb и угла γ.

95. *По даннымъ угламъ при основаніи* BAC $=\alpha$ *и* ABC $=\beta$ *вмѣстѣ съ сегментомъ основанія* AD *найти другой сегментъ* DB. Черт. 9.

Рѣшеніе: Положивъ AD$=a$ и BD$=x$, будетъ изъ треугольника прямоугольнаго ACD перпендикуляръ CD$=a\,\text{tg}.\alpha$, а изъ треугольника прямоугольнаго CDB получимъ CD $=x\,\text{tg}.\beta$, слѣд: выйдетъ $a\,\text{tg}.\alpha=x\,\text{tg}.\beta$, откуда $x=\frac{a\,\text{tg}.\alpha}{\text{tg}.\beta}$; по сему для нахожденія сегмента DB должно поступать такъ: $\text{tg}.\beta : \text{tg}.\alpha = a : x$ (т: е:) сегменты находятся въ обратномъ содержаніи тангенсовъ угловъ при основаніи.

96. *По данной суммѣ боковъ треугольника* ABC, AC+BC$=a$ *вмѣстѣ съ углами при основаніи* CAB$=\alpha$, CBA$=\beta$ *найти бока* AC и BC.

Рѣшеніе. Положивъ AC$=x$, будетъ BC$=a-x$; слѣд: получимъ $\sin.\alpha : \sin.\beta = a-x : x$; откуда выйдетъ $x\sin.\alpha$, $=a\sin.\beta - x\sin.\beta$, или
$x=\frac{a\sin.\beta}{\sin.\alpha+\sin.\beta}=$ AC и BC$=a-x=\frac{a\sin.\alpha}{\sin.\alpha+\sin.\beta}$ слѣд:
AC+BC : AC$=\sin.\alpha+\sin.\beta : \sin.\zeta$: (т: е.) сумма боковъ содержится къ одному боку такъ, какъ сумма синусовъ угловъ при основаніи къ синусу угла тому боку противолежащаго.

97. *По данному основанїю* $AB = a$ *какого ниесть треугольника и угловъ при основанїи* α *и* β *найти высоту.*

Рѣшенїе. Назвавъ перпендикуляръ $CD = x$ изъ треугольника прямоугольнаго ACD выйдетъ $\sin.\alpha : x = \cos.\alpha : AD$; слѣд: $AD = \frac{x \cos.\alpha}{\sin.\alpha} = x \cot.\alpha$; равнымъ образомъ изъ другаго треугольника прямоугольнаго CDB получимъ $DB = x \cot.\beta$; слѣд: выйдетъ $AD + DB = AB = a = x \cot.\alpha + x \cot.\beta$, откуда найдется $x = \frac{a}{\cot.\alpha + \cot.\beta} = CD$.

Другое рѣшенїе:

98. Поелику въ треугольникѣ ABC синусъ угла ECB равенъ $\sin.(\alpha+\beta)$; ибо продолживъ бокъ AC, выйдетъ уголъ $ECB = \alpha + \beta$, и слѣд: синусы угловъ ACB и ECB будутъ одинаки; то получимъ $AC : \sin.\beta = a : \sin.(\alpha+\beta)$, откуда $AC = \frac{a \sin.\beta}{\sin.(\alpha+\beta)}$. По томъ изъ треугольника прямоугольнаго ACD получимъ $1 : AC = \sin.\alpha : CD$ слѣд: $CD = AC \sin.\alpha = x$, или $x = \frac{a \sin.\alpha \sin.\beta}{\sin.(\alpha+\beta)}$.

99. Поелику мы здѣсь нашли двойную величину для x; 1е. $x = \frac{a}{\cot.\alpha + \cot.\beta}$ и 2е. $x = \frac{a \sin.\alpha \sin.\beta}{\sin.(\alpha+\beta)}$, то сравнивъ сїи величины между собою получимъ $\frac{a}{\cot.\alpha + \cot.\beta} = \frac{a \sin.\alpha \sin.\beta}{\sin.(\alpha+\beta)}$ Поставивъ $\frac{\cos.\alpha}{\sin.\alpha}$ вмѣсто $\cot.\alpha$ и $\frac{\cos.\beta}{\sin.\beta}$ вмѣсто $\cot.\beta$, получимъ $\frac{a \sin.\alpha \sin.\beta}{\cos.\alpha \sin.\beta + \sin.\alpha \cos.\beta} = \frac{a \sin.\alpha \sin.\beta}{\sin.(\alpha+\beta)}$. Поелику здѣсь числители равны, то и знаменателямъ надлежитъ быть равнымъ между собою; слѣд: получимъ, какъ уже давно извѣстно, $\sin.(\alpha+\beta) = \sin.\alpha \cos.\beta + \cos.\alpha \sin.\beta$.

100. *Найти треугольникъ ABC, коего периметръ или сумма трехъ боковъ извѣстна* $= a$, *площадь* $= b$ *и уголъ C данную величину имѣетъ* $= \gamma$.

Рѣшенїе. Положивъ искомые бока $AC = x$; $BC = y$ $AB = Z$ и уголъ данной $C = \gamma$, получимъ

1е. $x + y + Z = a$ или $x + y = a - Z$. По томъ выйдетъ

2е. $\frac{1}{2} xy \sin.\gamma = bb$; или $xy = \frac{2bb}{\sin.\gamma}$; третїе же уравненїе полу-

лучится изъ § 85, а имянно, $ZZ = xx + yy - 2xy \cos.\gamma$. Поелику $xy = \frac{2bb}{\sin.\gamma}$, то будетъ $2xy \cos.\gamma = \frac{4bb\cos.\gamma}{\sin.\gamma}$, что вмѣсто $2xy \cos.\gamma$ поставивъ, получимъ $ZZ = xx + yy - \frac{4bb\cos.\gamma}{\sin.\gamma}$, или $xx + yy = ZZ + \frac{4bb\cos.\gamma}{\sin.\gamma}$. Теперь взявъ квадратъ перваго уравненія выйдетъ $xx + 2xy + yy = aa - 2aZ + ZZ$, гдѣ вмѣсто $xx + yy$ и $2xy$ найденныя величины поставивъ получимъ $ZZ + \frac{4bb\cos.\gamma}{\sin.\gamma} + \frac{4bb}{\sin.\gamma} = aa - 2aZ + ZZ$, откуда найдется $2aZ = aa - \frac{4bb\cos.\gamma}{\sin.\gamma} - \frac{4bb}{\sin.\gamma}$, или $2aZ = aa - 4bb\left(\frac{\cos.\gamma + 1}{\sin.\gamma}\right)$; но $\frac{\cos.\gamma + 1}{\sin.\gamma} = \cot.\frac{1}{2}\gamma$ (§ 31) слѣд: $2aZ = aa - 4bb\cot.\frac{1}{2}\gamma$, или $Z = \frac{aa - 4bb\cot.\frac{1}{2}\gamma}{2a}$. Нашедъ бокъ $AB = Z$, прочія бока уже легко найти можно; ибо съ начала получимъ $x + y = a - Z = \frac{aa + 4bb\cot.\frac{1}{2}\gamma}{2a}$. Но поелику

$xx + yy = ZZ + \frac{4bb\cos.\gamma}{\sin.\gamma}$ и $xy = \frac{2bb}{\sin.\gamma}$, то будетъ

$xx + yy - 2xy = ZZ + \frac{4bb\cos.\gamma}{\sin.\gamma} - \frac{4bb}{\sin.\gamma} = ZZ - 4bb\left(\frac{1 - \cos.\gamma}{\sin.\gamma}\right)$; но $\frac{1 - \cos.\gamma}{\sin.\gamma} = \operatorname{tg}.\frac{1}{2}\gamma$ (§ 31); слѣд: $xx - 2xy + yy = (x - y)^2 = ZZ - 4bb\operatorname{tg}.\frac{1}{2}\gamma$, или $x - y = \sqrt{ZZ - 4bb\operatorname{tg}.\frac{1}{2}\gamma}$. Нашедъ же $x - y$ и зная, чему равно $x + y$, удобно можно опредѣлить x и y и слѣд: разрѣшить предложенной вопросъ по надлежащему.

101. Если уголъ γ будетъ прямой, то для $\sin.\frac{1}{2}\gamma = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $\cos.\frac{1}{2}\gamma = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $\operatorname{tg}.\frac{1}{2}\gamma = 1$ и $\cot.\frac{1}{2}\gamma = 1$ выйдетъ $Z = \frac{aa - 4bb}{2a}$; $x + y = \frac{aa + 4bb}{2a}$ и $x - y = \sqrt{ZZ - 4bb}$.

102. *Во всякомъ параллелограммѣ квадраты діагональныхъ линѣй AC и DB вмѣстѣ взятыя равны квадратамъ боковъ такъ же вмѣстѣ взятымъ.*

Рѣшеніе. Поелику углы A и B составляютъ 180°, то по § 9, будетъ $\cos.A + \cos.B = 0$. И такъ въ треуголь- Черт. 11.

 никѣ

никѣ ABD по § 88 получимъ $\cos. A = \frac{AB^2 + AD^2 - BD^2}{2\, AB.\, AD}$. Равнымъ образомъ изъ треугольника ABC выйдетъ $\cos. B = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2\, AB.\, BC}$; слѣдовательно получимъ $\cos. A + \cos. B = 0 = \frac{AB^2 + AD^2 - BD^2}{2\, AB.\, AD} + \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2\, AB.\, BC}$. Но поелику $AD = BC$ и $AB = DC$, то выйдетъ $DC^2 + AD^2 - BD^2 + AB^2 + BC^2 - AC^2 = 0$, или $AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + DC^2 + AD^2$ ч. н. н.

Черт. 12. 103. *Въ четвероугольникѣ ABCD въ кругѣ написанномъ, прямоугольникъ дїагональныхъ линѣй бываетъ равенъ суммѣ прямоугольниковъ изъ боковъ противолежащихъ (т: е)* $AC.\, BD = AB.\, CD + AD.\, BC$.

Рѣшенїе. Поелику углы $A + C = 180°$, то будетъ $\cos. A + \cos. C = 0$ слѣд: назвавъ линѣи $AB = a$; $BC = b$; $DC = c$; $AD = d$; $DB = f$ и $AC = g$, изъ треугольника ADB получимъ $\cos. A = \frac{aa + dd - ff}{2\, ad}$; а изъ треугольника DCB выйдетъ $\cos. D = \frac{bb + cc - ff}{2\, bc}$, слѣд: получимъ $\frac{aa + dd - ff}{2\, ad} + \frac{bb + cc - ff}{2\, bc} = 0$ помноживъ на $2\, abcd$ выйдетъ
$aabc + ddbc + acbb + ddcc = ffbd + daff = ff\,(bc + ad)$ или $ab\,(ac + bd) + cd\,(ac + bd) = ff\,(bc + ad)$ или $(ab + cd)\,(ac + bd) = ff\,(bc + ad)$ или $ff = \frac{(ab + cd)(ac + bd)}{bc + ad}$.
Равнымъ образомъ найдется $gg = \left(\frac{ad + bc)(ac + bd}{ab + cd}\right)$, откуда выйдетъ $ffgg = \left(\frac{(ab + cd)(ac + bd)(ad + bc)(ac + bd)}{(bc + ad)(ab + cd)}\right)$, или $ffgg = (ac + bd)^2$ или $fg = ac + bd$, ч. н. н.

104. Изъ сего слѣдуетъ, если всѣ бока четвероугольника и при томъ одна дїагональная линѣя будутъ даны, то оттуда можно всегда найти другую; ибо если a, b, c, d и f будутъ извѣстны, то найдется $g = \frac{ac + bd}{f}$.

105. *Написать какой нибудь правильной полигонъ какъ внутри, такъ и около даннаго круга.*

Черт. 13. *Рѣшенїе.* Положивъ радїусъ круга $AC = r$, и число боковъ полигона $= n$, представимъ окружность круга на

n равныхъ частей раздѣленную, изъ коихъ одна пусть будетъ AB бокъ вписаннаго полигона. По томъ проведи радїусы AC, BC $= r$, тогда будетъ уголъ ACB $= \frac{360^\circ}{n}$. Раздѣли сей уголъ линѣею CF по поламъ, которая раздѣлитъ такъ же и хорду AB на двѣ равныя части, и къ ней будетъ перпендикулярна: но поелику уголъ ACF $= \frac{180^\circ}{n}$ то будетъ AE $= r$ sin. $\frac{180^\circ}{n}$ и CE $= r$ cos. $\frac{180^\circ}{n}$ слѣд: бокъ вписаннаго полигона AB $= 2r$ sin. $\frac{180^\circ}{n}$. По томъ въ F къ радїусу CF проведи перпендикуляръ MFN, которой коснется круга въ F, и которой пересѣкается радїусами AC и BC въ *точкахъ* M и N; сїя линѣя MN будетъ бокъ описаннаго около круга многоугольника. Но поелику FM $= r$ tg. $\frac{180^\circ}{n}$ слѣд: бокъ описаннаго около круга полигона MN $= 2r$ tg. $\frac{180^\circ}{n}$, откуда безъ труда можно опредѣлить бока̀ всѣхъ полигоновъ какъ около круга, такъ и внутри онаго написанныхъ, полагая вмѣсто n безпрерывно числа 3, 4, 5, 6, и проч.

106. Положимъ для примѣра, что окружность круга раздѣлена на 10800 равныхъ частей, тогда бока̀ написаннаго многоугольника, какъ въ кругѣ, такъ и около круга для чрезвычайной своей малости будутъ равны между собою; слѣд: положивъ $n = 10800$, получимъ

AB $=$ MN $= 2r$ sin. $\frac{180^\circ}{10800} = 2r$ tg. $\frac{180^\circ}{10800} = 0.0005817764r$.

Но поелику синусъ дуги или угла, какъ то изъ чертежа ясно видѣть можно, есть половина хорды стягивающей удвоенную дугу, то бокъ AB раздѣливъ на 2 и положивъ $r = 1$, получимъ синусъ угла $\frac{180^\circ}{10800}$ или синусъ 1 минуты $= 0.0002908882$, которой отъ самой дуги чувствительно разниться не можетъ; слѣд: и самая дуга одной минуты будетъ $= 0.0002908882$. Помноживъ сїю дугу на 90° или на 5400 минутъ, получимъ дугу въ четверть окружности $= 1.5707963$, которую помноживъ еще на 2, получимъ половину

вину окружности круга или букву выше сего употребляемую $\pi = 3.1415926$, гдѣ всѣ 7 десятичныя дроби съ истинными согласуютъ. Махинъ же Агличанинъ положивъ, какъ и мы сдѣлали, дїаметръ круга $= 1$, изчислилъ содержанїе дїаметра къ окружности до 100 десятичныхъ цыфръ, къ коимъ г. Логни присовокупилъ еще 27. И такъ содержанїе дїаметра къ окружности изобразится слѣдующимъ образомъ: 3. 1415926535897932384626433832795028841971693993751058209749445923078164062862089986280348253421170679100821480865132723066470938446 +
Хотя ошибку въ 127 цыфрѣ сихъ десятичныхъ дробей учиненную вообразить не можно; однако въ смыслѣ Геометрическомъ выраженїе сїе окружности круга за истинное не принимаютъ: по сему требуется такое число, которое бы состояло изъ немногихъ цыфръ, и при томъ изображало бы точно содержанїе дїаметра къ окружности. Надъ симъ трудились древнїе, да нѣкоторые и изъ новѣйшихъ прилагаютъ такъ же старанїе разрѣшить сїю задачу извѣстную подъ именемъ *квадратуры круга*; однако всѣ труды таковыхъ искателей квадратуры круга по сїе время тщетны оказались.

СФЕРИ-

СФЕРИЧЕСКАЯ ТРИГОНОМЕТРІЯ.

ГЛАВА I.

О шарѣ или сферѣ и сѣченіи онаго.

1. ИзЪ Геометріи извѣстно, что полукружіе обращаясь около своего неподвижнаго поперешника до тѣхЪ порЪ, пока не придетЪ на то мѣсто, откуда оборачиваться стало, описываетЪ тѣло *шаромЪ* или *сферою* называемое. ВЪ немЪ неподвижный центрЪ полукружія называется *центромЪ* или *средоточіемЪ* шара; линѣи изЪ центра кЪ поверхности проведенныя называются *радіусами* или *полупоперешниками*; линѣи же чрезЪ центрЪ шара проходящія и пересѣкающія поверхность онаго вЪ двухЪ точкахЪ именуются *діаметрами* или *поперешниками*.

2. ИзЪ произхожденія шара слѣдуетЪ очевидно, что всѣ линѣи изЪ центра кЪ поверхности шара проведенныя, или радіусы шара, такЪ какЪ и вЪ кругѣ, бываютЪ равны между собою, и что сѣченіе сдѣланное по діаметру шара раздѣляетЪ его на двѣ равныя части.

3. *Если шарЪ пересѣчется какою ни есть плоскостію, то сѣченіе будетЪ кругЪ.*

Доказательство. ПоложивЪ сЪ начала, что сѣченіе Черт: ABD проходитЪ чрезЪ центрЪ шара C, ясно понять можно, 1. что линѣи изЪ центра C кЪ окруженію сего сѣченія проведенныя CA, CB, CD бываютЪ равны между собою, и равны радіусу шара; слѣдственно всѣ точки A, B, D и проч. находятся на окружности круга, коего центрЪ C. Но если шарЪ пересѣчется плоскостію EFH чрезЪ центрЪ его непроходящею, тогда изЪ центра C кЪ плоскости EFH проведи перпендикулярЪ CG, такЪ же точки F, H и C соедини линѣями CF, CH. Что сдѣлавЪ получимЪ $CG^2 + FG^2 = CF^2$ и $CG^2 + GH^2 = CH^2$; но $CF = CH$ радіусы шара, слѣд: $CG^2 + FG^2 = CG^2 + GH^2$ или $FG = GH$.

Но поелику равенство сїе всегда случается, гдѣ бы точка F взята ни была; то слѣдуетъ, что окруженїе сѣченїя есть кругъ, коего центръ G, а радїусъ GH.

4. *Круги, коихъ плоскости проходятъ чрезъ центръ шара, бываютъ равны между собою, и при томъ болѣе всѣхъ тѣхъ, коихъ плоскости чрезъ центръ шара не проходятъ.*

Доказательство. Положимъ, что одно какое ни есть сѣченїе ABD проходитъ чрезъ центръ шара C, тогда радїусъ его CD равенъ будетъ радїусу шара, и слѣд: всѣхъ такихъ круговъ радїусы будутъ равны между собою, такъ же какъ и самые круги. Въ каждомъ же другомъ кругѣ, коего плоскость чрезъ центръ шара не проходитъ, радїусъ GH будетъ менѣе радїуса шара CH; ибо $CH^2 = CG^2 + GH^2$ слѣд: CH больше, нежели GH.

5. Поелику тѣ круги, коихъ плоскости проходятъ чрезъ центръ шара, бываютъ болѣе всѣхъ тѣхъ, коихъ плоскости чрезъ центръ шара не проходятъ, то сего для называются они *большими кругами шара.*

6. *Всѣ большїе круги разсѣкаютъ себя на двѣ равныя части, и общее сѣченїе ихъ плоскостей есть дїаметръ шара.*

Доказательство. Поелику плоскости всѣхъ сихъ круговъ проходятъ чрезъ центръ шара, то они параллельны быть не могутъ; по чему пересѣкутъ себя взаимно на нѣкоторой прямой линѣи, которая проходитъ такъ же чрезъ центръ шара: но линѣя чрезъ центръ проходящая и пересѣкающая поверхность въ двухъ точкахъ называется дїаметръ шара; слѣдственно дїаметръ есть общее сихъ круговъ сѣченїе, и раздѣляетъ ихъ на двѣ равныя части.

7. *Чрезъ каждыя двѣ точки на поверхности шара взятыя можно провести большой кругъ, и чрезъ каждую точку провести можно большой кругъ перпендикулярно къ данному другому большому кругу.*

Доказательство. Если данныя двѣ точки и центръ шара соединятся прямыми линѣями, то произшедшїй оттуда

туда треугольникЪ находиться будетЪ на одной плоскости, чрезЪ которую если пересѣчется шарЪ, сѣченїе будетЪ большїй кругЪ, и пройдетЪ чрезЪ данныя двѣ точки. Но поелику изЪ данной точки можно опустить перпендикулярЪ на плоскость даннаго большаго круга, то по соединенїи концовЪ сего перпендикуляра сЪ центромЪ шара произойдетЪ треугольникЪ на одной плоскости лежащїй, чрезЪ которую сдѣланное сѣченїе будетЪ большой кругЪ, и при томЪ перпендикулярenЪ кЪ данному большому кругу.

8. ДїаметрЪ шара перпендикулярный кЪ плоскости круга, произшедшаго отЪ сѣченїя шара, называется *осью*, а концы сея оси именуются *полюсами.* ТакЪ Pp есть ось круговЪ EFH и ABD, а точки P, p полюсы.

9. *Всѣ точки окружности какого ни есть круга на поверхности шара отстоятЪ на равныя дуги большихЪ круговЪ отЪ своего полюса.*

Доказат: Возми какїя ни есть двѣ точки, напр: F, H, и проведи чрезЪ нихЪ и полюсЪ P большїе круги PHp и PFp, такЪ же протяни радїусы HC, FC, HG, FG; тогда вЪ треугольникахЪ CGF и CGH для равенства всѣхЪ боковЪ будутЪ и углы при C равны между собою; и слѣд: самыя дуги PH и PF будутЪ такЪ же равны между собою.

10. *Большой кругЪ отЪ каждаго своего полюса отстоитЪ на четверть большаго круга, такЪ же кругЪ, коего какая ни есть точка отстоитЪ отЪ полюса на четверть круга, есть большой.*

Доказат: Если кругЪ большой будетЪ ABD, то пройдетЪ онЪ чрезЪ C, и радїусы CB, CD, кои суть сѣченїя сЪ плоскостями PFp и PHp, будутЪ перпендикулярны кЪ оси PCp, которая сама по §. 8 перпендикулярна ко всей плоскости ABD, и слѣд: какЪ дуги PB, PD, такЪ и дуги pB, pD будутЪ четверти окружности круга.

Но если кругЪ, какЪ EFH, будетЪ, не самой большой, то плоскость его не пройдетЪ чрезЪ центрЪ C, слѣд:

 пере-

пересѣкши шаръ чрезъ центръ плоскостїю ABD параллельною съ плоскостїю EFH, будутъ PB, PD, pB, pD четверти окружности круга, PF, PH ихъ меньше, а pF и pH больше. Изъ сего слѣдуетъ очевидно, что кругъ, коего точка какая нибудь отъ полюса отстоитъ на четверть круга, будетъ наибольшїй.

11. *Уголъ сферическїй* называется тотъ, который на поверхности шара содержится между двумя дугами большихъ круговъ взаимно себя пересѣкающихъ: за мѣру же сего угла берется уголъ прямолинѣйный, произшедшїй отъ прямыхъ линѣй лежащихъ съ боками угла сферическаго на однихъ плоскостяхъ, и пересѣкающихъ себя взаимно въ самой ихъ пересѣчкѣ: такъ FPH есть уголъ сферической, вмѣсто коего берется уголъ прямолинѣйный fPh произшедшїй отъ линѣй касательныхъ Pf и Ph.

12. *Ежели дуга упадетъ на другую, то составитъ два угла, или два прямыхъ, или равные двумъ прямымъ.*

Доказательство. Сїе предложенїе само по себѣ очевидно; ибо касательная линѣя fP съ касательною линѣею ePh дѣлаетъ два угла, или два прямыхъ, или равные двумъ прямымъ.

13. *Ежели два бока угла сферическаго чрезъ верхъ его продолжатся, то углы накрестъ лежащїе будутъ равны между собою.*

Доказательство. Ибо, если касательныя линѣи fP и hP продолжатся чрезъ верхъ P, то углы при верху накрестъ стоящїе будутъ равны между собою.

14. *Ежели плоскости боковъ будутъ между собою перпендикулярны, то уголъ будетъ прямой; и обратно, если уголъ будетъ прямой, то плоскости будутъ перпендикулярны.*

Доказательство. Если плоскость FPp будетъ перпендикулярна къ плоскости HPp, то касательная линѣя fP перпендикулярная къ дїаметру Pp общему сихъ плоскостей сѣченїю, будетъ перпендикулярна ко всей плоскости HPp,

HPp, и слѣд: такъ же къ касательной линѣи Ph. Если же касательная fP будетъ перпендикулярна къ касательной Ph, и поелику она такъ же перпендикулярна къ діаметру Pp, то будетъ она перпендикулярна и ко всей плоскости HPp; слѣд: плоскость FPp будетъ къ ней такъ же перпендикулярна.

15. *Если изъ какой ниесть точки діаметра шара проходящаго чрезъ верхъ угла проведутся на плоскостяхъ самыхъ дугъ двѣ линѣи къ діаметру перпендикулярныя, то уголъ прямолинѣйный равенъ будетъ сферическому.*

Доказательство. Если такія линѣи будутъ GF и GH, то будутъ онѣ параллельны съ линѣями Pf и Ph къ діаметру Pp перпендикулярными; по чему уголъ FGH будетъ равенъ углу fPh.

16. *Мѣра угла сферическаго есть дуга круга имѣющаго полюсъ въ верху его, и содержащагося между его боками.*

Доказательство: Пересѣкши шаръ плоскостію ABD или EFH перпендикулярною къ діаметру Pp, общему сѣченію плоскостей дугъ BP и PD, сѣченіе будетъ кругъ имѣющій полюсъ P, коего дуга BD или FH содержащаяся между боками PF и PH будетъ мѣра угла BCD или FGH, который находясь между радіусами BC, CD или FG, GH перпендикулярными къ діаметру Pp, который будетъ такъ же перпендикуляренъ къ плоскости ABD или EFH, равняется углу сферическому FPH.

17. *Если сферическаго угла бока продолжатся, то они пересѣкутъ себя такъ, что составятъ полукружіе, и при томъ новопроизшедшій оттуда уголъ сферическій равенъ будетъ прежнему.*

Доказательство. Поелику PCp есть діаметръ обѣихъ дугъ PF и PH; то какъ одна, такъ и другая продолженная пройдетъ чрезъ точку p; по чему PFp и PHp будутъ полуокружія; угловъ же FpH и FPH общая мѣра будетъ дуга BD или FH.

18. *Большой кругъ перпендикулярный къ другому большому кругу проходитъ чрезъ его полюсы, и если большой кругъ проходитъ чрезъ полюсъ другаго большаго круга, то онъ будетъ къ нему перпендикуляренъ.*

Доказательство. Если большой кругъ PBp перпендикуляренъ къ большому кругу ABD, то плоскость PBp будетъ перпендикулярна къ плоскости ABD; по чему, если шаръ пересѣчется плоскостїю APDp чрезъ центръ C проходящею и перпендикулярною къ плоскости ABD, то сѣченїе PCp будетъ къ ней такъ же перпендикулярно; и слѣд: точки P, p находящїяся на кругѣ PBp будутъ полюсы круга ABD. Ежели же большой кругъ PBp проходитъ чрезъ полюсъ P большаго круга ABD, то онъ пройдетъ такъ же чрезъ его ось PCp, къ большому кругу перпендикулярную, и слѣд: будетъ къ ней такъ же перпендикуляренъ.

ГЛАВА II.

О Сферическихъ треугольникахъ.

19. *Сферическимъ треугольникомъ* называется тотъ, который содержится на поверхности шара между тремя дугами большихъ круговъ, кои его *боками* именуются. Но что здѣсь одни только большїе круги берутся въ разсужденїе, причина тому та, что меньшїе круги не всѣ одинакой величины, но различными радїусами описываются; при томъ ихъ плоскости не всегда одну ось пересѣкаютъ, и центръ ихъ не всегда одинъ бываетъ, какъ то съ большими кругами случается, ибо они всегда чрезъ центръ шара проходятъ: знанїе же разрѣшать Сферическїе Треугольники, или изъ трехъ данныхъ частей Сферическаго треугольника находить прочїе, называется *Сферическою Тригонометрїею.*

20. *Во всякомъ треугольникѣ одинъ бокъ бываетъ всегда меньше суммы двухъ прочихъ.*

Доказат: Истинна сего предложенїя столь очевидна, что никакого не требуетъ доказательства.

21. *Всякой бокъ Сферическаго треугольника бываетъ всегда меньше полуокружности круга.* Черт: 2.

Доказат: Продолжи бока AB и AC, пока не сойдутся въ точкѣ D. Продолжи такъ же бока BA и BC, пока взаимно себя не пересѣкутъ въ точкѣ E. Поелику бока треугольника суть дуги большихъ круговъ шара, а ABD, ACD и BCE полуокружїя, то слѣдуетъ, что AB, AC и BC меньше полуокружности.

22. *Сумма трехъ сторонъ Сферическаго треугольника бываетъ всегда меньше 360 градусовъ, или цѣлой окружности круга.*

Доказательство. Продолжи бока AB и AC, пока не сойдутся въ точкѣ D; тогда дуги ACD и ABD будутъ полуокружности, § 17. Но DC+ BD > BC. Придавъ съ обѣихъ сторонъ AC+ AB выйдетъ AC+AB+DC+BD > AC+AB +BC, то есть, два полуокружїя ACD и ABD вмѣстѣ взятыя, или 360 градусовъ бываютъ больше трехъ боковъ AC, AB и BD вмѣстѣ взятыхъ.

23. *Ежели изъ трехъ угловъ* A, B, C *сферическаго треугольника, какъ полюсовъ, опишутся три дуги* FE, FD *и* DE, *кои составятъ новой треугольникъ* FDE; *тогда каждой бокъ новаго треугольника* DEF, *будетъ дополненїе того угла, изъ котораго онъ какъ изъ полюса описанъ; и каждой уголъ новаго треугольника будетъ дополненїе противолежащаго бока треугольника* ABC. Черт: 3.

Доказательство. Поелику A есть полюсъ дуги FGHE, то разстоянїе точекъ A и E будетъ равно 90°, § 10; и поелику C есть полюсъ дуги DNME, то разстоянїе точекъ C и E будетъ такъ же равно 90°; слѣд: E есть полюсъ дуги NACG. Равнымъ образомъ докажется, что F есть полюсъ дуги IABH, а D полюсъ дуги MBCL. Поелику дуги FI, и LD четверти круга, то будетъ DL+ FI

$FI = 180°$ или $DL + FL + LI = 180°$ или $DF + LI = 180°$; слѣд: DF есть дополненіе дуги LI. Но LI имѣя полюсъ B будетъ мѣра угла ABC, по чему DF будетъ такъ же дополненіе угла ABC. Равнымъ образомъ докажется, что дуга GH мѣра угла A есть дополненіе дуги FE, а дуга NM мѣра угла C есть дополненіе дуги DE. Сверхъ сего, какъ дуга BI, такъ и AH суть четверти круга, то общая ихъ часть AB будетъ дополненіе дуги IABH, коею измѣряется уголъ F. Равнымъ образомъ дуга AC будетъ дополненіе угла E, а BC дополненіе угла D до 180 градусовъ.

24. *Сумма трехъ угловъ сферическаго треугольника бываетъ всегда больше 180°, а меньше 540°, или шести прямыхъ угловъ.*

Доказательство. Поелику сумма трехъ угловъ треугольника ABC вмѣстѣ съ суммою трехъ боковъ треугольника DEF составляетъ 3. 180° или 540°, §. 23, то слѣдуетъ 1е. что сумма трехъ угловъ A, B, C меньше нежели 3. 180° или 540°. 2е. Сумма трехъ боковъ EF, DF, DE меньше, нежели 360°, §. 22; слѣд: останется больше 180 для суммы трехъ угловъ A, B, C.

25. И такъ сферической треугольникъ можетъ имѣть три угла прямыхъ, и такъ же три угла тупыхъ; слѣдственно изъ двухъ данныхъ угловъ сферическаго треугольника не можно заключать о третьемъ, какъ то въ прямолинѣйныхъ треугольникахъ.

26. *Два сферическіе треугольника бываютъ равны между собою. 1е. Когда три бока одного треугольника равны всѣмъ тремъ бокамъ другаго треугольника, каждой каждому.* Черт: 4. *2е Когда два бока равные уголъ равной заключаютъ. 3е Если два угла при одинакой сторонѣ лежащіе равны между собою. 4е. Когда всѣ три угла одного треугольника равны тремъ угламъ треугольника.*

Доказательство. Первые три случая доказываются такъ же, какъ въ Геометріи показывается равенство треугольниковъ: что же касается до четвертаго случая, то можно

можно доказать его слѣдующимъ образомъ: Здѣлай для каждаго треугольника ABC и *abc* дополнительной треугольникъ DEF и *def*, такъ какъ въ § 24 показано; тогда для равенства угловъ A, B, C и *a*, *b*, *c* стороны EF, DF, и DE дополненія первыхъ угловъ равны будутъ сторонамъ *ef*, *df*, *de* дополненіямъ послѣднихъ, слѣд: по первому изъ сихъ четырехъ случаю сіи два треугольника DEF и *def* будутъ совершенно между собою равны; такъ же углы D, E, F, будутъ равны угламъ *d*, *e*, *f* каждой каждому, и при томъ стороны BC, AC, AB дополненія трехъ первыхъ угловъ равны сторонамъ *bc*, *ac*, *ab* дополненіямъ трехъ послѣднихъ.

28. *Во всякомъ равнобедренномъ треугольникѣ* ABC *два угла* B *и* C *равнымъ сторонамъ* AC *и* AB *противололоженныя равны между собою; и если въ треугольникѣ два угла* B *и* C *равны, то и стороны* AC *и* AB *равнымъ угламъ противолежащія равны будутъ между собою.* Черт. 5.

Доказательство. Возми на AB и AC равныя дуги AE и AD и проведи BD и EC. Сдѣлавъ сіе явствуетъ, что треугольники ABD и AEC равны, ибо бока AE, AC, AD, AB равные заключаютъ уголъ A общей, и слѣд: такъ же BD=EC. По томъ изъ AB и AC по положенію равныхъ отнявъ AE и AD останется EB=DC: но BC есть бокъ общій треугольниковъ EBC и DCB; слѣдственно тогда три бока равны тремъ бокамъ каждой каждому, то и сходственные углы B и C равны будутъ между собою.

2. Если уголъ B равенъ углу C, то будетъ AB=AC; ибо взявъ EB=DC и протянувъ опять дуги BD, EC треугольники ECB и BDC будутъ равны; ибо бока EB BC, и DC, BC заключаютъ углы B и C по положенію равные; слѣд: 1е EC=BD, 2е. DBC=ECB; такъ же дополненіе угла BDA равно будетъ дополненію угла CEA. 3е. DBC=ECB, откуда для EBC=DCB по положенію будетъ такъ же ECA=DBA. И такъ въ треугольникахъ ADB, AEC бока BD, EC и углы противолежащіе ADB, ABD равны угламъ AEC и ACE, при томъ третей уголъ

А обоимъ треугольникамъ общїй; слѣдственно треугольники равны между собою и бокъ AE = боку AD; придавъ же равныя части EB, DC выйдетъ AEB = ADC.

29. Изъ сего слѣдуетъ очевидно, что треугольникъ равноугольный бываетъ вмѣстѣ равностороннымъ, и обратно.

30. *Во всякомъ сферическомъ треугольникѣ* ABC *бокъ*
Черт: 6. BC *углу большому* A *противолежащїй бываетъ больше; а* AC *углу меньшому* B *противололоженный меньше.*

Доказательство: Когда уголъ A больше угла B по положенїю, то сдѣлавъ DAB = DBA выйдетъ AD = BD и AD + CD = BD + CD; но $AD + CD > AC$; след: BD + CD или бокъ BC углу большому A противолежащїй бываетъ больше бока AC углу меньшому B противоположеннаго.

Г Л А В А III.

О разрѣшенїи сферическихъ треугольниковъ.

31. Всякой сферической треугольникъ, такъ какъ и прямоугольной, составляютъ шесть частей, коими онъ опредѣляется, а именно три бока и три угла. Изъ Геометрїи извѣстно, что три части треугольника должны быть даны, чтобъ можно было оной начертить; слѣдственно и здѣсь три части сферическаго треугольника должны быть извѣстны, чтобъ найти прочїя его части. Наука же, учащая изъ данныхъ трехъ частей сферическаго треугольника находить чрезъ выкладки прочїя его части, называется *сферическою тригонометрїею.* Разрѣшимъ съ начала прямоугольные сферическїе треугольники, а по томъ уже приступимъ къ разрѣшенїю треугольниковъ вообще, такъ же какъ и въ плоской поступали тригонометрїи.

32. Пусть будетъ DAB сферической треугольникъ, коего уголъ A прямой. Изъ дуги AD сдѣлай цѣлой кругъ,
Черт. 7. которой продолженные бока AB и BD пересѣкутъ въ точкахъ E и F, такъ что ABE и DBF будутъ полукружїя,

а

а ACE и DCF діаметры. По томъ проведи BC и BI перпендикулярно къ плоскости ACE, которая къ діаметру AE будетъ такъ же перпендикулярна въ точкѣ I. Послѣ сего протяни IG и BG перпендикулярно къ діаметру DCF. Что сдѣлавъ, плоскость BIG будетъ перпендикулярна къ плоскости GIC; слѣд: CG перпендикулярна къ плоскости BIG, ибо она перпендикулярна къ сѣченію IG плоскостей IGB, IGC между собою перпендикулярныхъ. Сверьхъ сего пересѣки полукружія DAF, DBF на двѣ равныя части въ L и H, и проведи чрезъ L и H дугу большаго круга пересѣкающую полкруга ABE въ точкѣ P; тогда углы DHL, DLH будутъ прямые, и слѣд: D полюсъ круга LPH, а LH мѣра угла ADB; такъ же для угла LAP прямаго будетъ P полюсъ круга AL; PA, PL четверти круга, а AL мѣра угла BPH.

33. И такъ разрѣшеніе всякаго сферическаго прямоугольнаго треугольника зависитъ отъ разсмотрѣнія пирамиды, коея верхъ C, а основаніе BIG, и отъ сравненія сферическаго треугольника BAD имѣющаго при A уголъ прямой съ треугольникомъ BHP прямоугольнымъ при H. Всѣ стороны пирамиды суть прямоугольные треугольники; ибо углы BIG, BIC прямые для BI перпендикулярной ко всей плоскости GIC, уголъ IGC прямой по положенію, а BGC по прежнему §. Сферическаго же треугольника PHB будетъ бокъ $BH = 90^\circ - DB$; $BP = 90^\circ - AB$, $HP = 90^\circ - HL$ мѣра угла BDA; угла BPH мѣра, дуга AL есть дополненіе бока AD; углы же B на крестъ лежащіе равны между собою.

34. Поелику въ пирамидѣ углы BGC, BIC прямые, то BG, BI будутъ синусы угловъ BCG, BCI или дугъ BD и AB къ радіусу $BC = 1$, и поелику такъ же уголъ BIG прямой, то будетъ $BG : BI = 1 : \sin. BGI$ или $\sin. BD$ $\sin. AB = 1 : \sin. ADB$ противолежащему сторонѣ AB. Равнымъ образомъ будетъ $\sin. BD : \sin. AD = 1 : \sin. ABD$ слѣд: въ прямоугольномъ сферическомъ треугольникѣ радіусъ содержится къ синусу угла, какъ синусъ основанія къ синусу бока тому углу противолежащаго.

35. Взявъ теперь CG за радїусъ, будутъ BG, GI тангенсы угловъ BCG, ICG или дугъ BD, AD ради угловъ прямыхъ BGC, и IGC; но поелику уголъ BIG прямой, то выйдетъ BG : GI = 1 : ſin. GBI = 1 : coſ. G = 1 : coſ. D, при которомъ углѣ D лежитъ сторона AD, или tg BD : tg AD = 1 : coſ. D. Равнымъ образомъ получимъ tg BD : tg AB = 1 : coſ. B. Изъ сего слѣдуетъ, что радїусъ содержится къ косинусу угла такъ, какъ тангенсъ основанїя къ тангенсу бока подлежащаго.

36. Для угловъ прямыхъ CGI, CIB будетъ IG синусъ угла ICG или дуги AD; IB тангенсъ угла ICB или дуги AB къ радїусу CI = 1; и поелику уголъ BIG прямой, то выйдетъ GI : IB = 1 : tg. BGI = 1 : tg D, коему углу D подлежитъ DA, а противолежитъ AB, или ſin. AD : tg AB = 1 : tg D; такъ же получимъ ſin. AB : tg AD = 1 : tg B. Слѣд: радїусъ содержится къ тангенсу угла, какъ синусъ бока подлежащаго къ тангенсу бока противолежащаго.

37. Изъ треугольника BPH по § 34 получимъ ſin. HP : ſin. BH = 1 : ſin. HPB; но HP = 90 — HL и BH = 90 — DB. (§ 33.) Слѣд: coſ. HL : coſ. DB = 1 : ſin. HPB, поелику HPB есть дополненїе бока AB, а HL или AB мѣра угла ADB, то вмѣсто HL поставивъ AB получимъ coſ. AB. coſ. DB = 1 : coſ. AB, или радїусъ содержится къ косинусу одного бока такъ, какъ косинусъ другаго къ косинусу основанїя.

38. Изъ того же § 34 слѣдуетъ ſin. BP : ſin. HP = 1 : ſin. PBH = 1 : ſin. ABD; но ſin. BP = ſin. (90 — AB) = coſ. AB, а ſin. HP = ſin. (90 — HL) = coſ. HL = coſ. D, ибо HL есть мѣра угла D; слѣд: одно вмѣсто другаго взять можно. По сему выйдетъ coſ. AB : coſ. D = 1 : ſin. ABD или coſ. AD : coſ. B = 1 : ſin. ADB; слѣдовательно радїусъ содержится къ синусу угла подлежащаго, какъ косинусъ бока къ косинусу угла противолежащаго.

39. Наконецъ по § 36 получимъ ſin. BH : tg HP = 1 : tg. HBP = 1 : tg. ABD; но ſin. BH = ſin. (90 — DB) = coſ.

DB и $tg\ HP = tg\ (90 - HL) = cot.\ HL = cot.\ D$ (§. 38). Слѣд: получимъ $cos.\ DB : cos.\ D = 1 : tg\ ABD$. Изъ сего слѣдуетъ, что радїусъ содержится къ тангенсу одного угла, такъ какъ косинусъ основанїя къ котангенсу другаго угла.

40. Изъ вышеобъявленныхъ предложенїй слѣдуетъ, что въ треугольникѣ сферическомъ APM прямоугольномъ при P положивъ радїусъ или синусъ цѣлой $= 1$, и назвавъ $AP = x$; $PM = y$; $AM = s$, углы $PAM = \zeta$; $AMP = \theta$ и APM $= 90°$, получимъ Черт. 8.

I.	$sin.\ y = sin.\ \zeta\ sin.\ s$	§ 34.
II.	$sin.\ x = sin.\ \theta\ sin.\ s$	
III.	$tg.\ x = cos.\ \zeta\ tg.\ s.$	§ 35.
IV.	$tg.\ y = cos.\ \theta\ tg.\ s$	
V.	$tg.\ x = sin.\ y\ tg.\ \theta$	§. 36.
VI.	$tg.\ y = sin.\ x\ tg.\ \zeta$	
VII.	$cos.\ s = cos.\ x\ cos.\ y$	§. 37.
VIII.	$cos.\ \theta = sin.\ \zeta\ cos.\ x$	§. 38.
IX.	$cos.\ \zeta = sin.\ \theta\ cos.\ y$	

X. $cos.\ s\ tg.\ \zeta = cot.\ \theta$ или $cos.\ s\ tg\ \zeta\ tg\ \theta = 1$, положивъ $\frac{1}{tg.\ \theta}$ вмѣсто $cot.\ \theta$. §. 39.

Посредствомъ сихъ десяти уравненїй, изъявляющихъ свойства прямоугольныхъ сферическихъ треугольниковъ, можно разрѣшить всѣ возможные вопросы касающїеся до сихъ треугольниковъ; ибо изъ данныхъ двухъ (положивъ радїусъ или синусъ цѣлой равенъ единицѣ) всегда найдется третїе.

41. Приступимъ теперь къ разрѣшенїю какихъ нибудь треугольниковъ сферическихъ, изъ коихъ пусть будетъ одинъ ABC. Въ немъ положивъ $AB = c$; $Ac = b$ и $Bc = a$, проведемъ изъ A перпендикуляръ AD и назовемъ $BD = m$; $DC = n$ и углы $BAD = \theta$ и $DAC = \zeta$. Что сдѣлавъ, изъ треугольниковъ прямоугольныхъ ABD и ADC получимъ $sin.\ AD = sin.\ B\ sin.\ c = sin.\ C\ sin.\ b$, откуда слѣ- Черт. 9.

 дуетъ

дуетъ $\sin. B : \sin. C = \sin. b : \sin. c$; равнымъ образомъ выйдетъ $\sin. B : \sin. A = \sin. b : \sin. a$ или

$\sin. C : \sin. A = \sin. c : \sin. a$.

Слѣдственно, во всякомъ сферическомъ треугольникѣ синусы боковъ содержатся такъ, какъ синусы угловъ бокамъ противолежащихъ.

42. Потомъ изъ тѣхъ же прямоугольныхъ треугольниковъ получимъ

$\cos. AD = \frac{\cos. B}{\sin. \theta} = \frac{\cos. C}{\sin. \zeta}$ или $\frac{\sin. \zeta}{\sin. \theta} = \frac{\cos. C}{\cos. B}$.

Но $\zeta = A - \theta$; слѣд: $\sin. \zeta = \sin. A \cos. \theta - \cos. A \sin. \theta$ что вмѣсто $\sin. \zeta$ поставивъ получимъ

$\frac{\sin. A \cos. \theta}{\sin. \theta} - \cos. A = \frac{\cos. C}{\cos. B}$. Поелику $\frac{\cos. \theta}{\sin. \theta} = \frac{1}{tg. \theta}$

и $tg\, \theta = \frac{1}{\cos. c\ tg\, B}$ (§ 40), то выйдетъ

$\sin. A \cos. c\ tg\, B - \cos. A = \frac{\cos. C}{\cos. B}$, или помноживъ на $\cos. B$ и для $tg\, B \cos. B = \sin. B$, получимъ

$\cos. C = \sin. A \cos. c \sin. B - \cos. A \cos. B$; равнымъ образомъ выйдетъ

$\cos. B = \sin. A \cos. b \sin. C - \cos. A \cos. C$ и

$\cos. A = \sin. B \cos. a \sin. C - \cos. B \cos. C$.

43. Поелику изъ тѣхъ же треугольниковъ прямоугольныхъ ABD и ADC по формуламъ въ § 40 найденнымъ слѣдуетъ

$\cos. AD = \frac{\cos. c}{\cos. m} = \frac{\cos. b}{\cos. n}$ или $\frac{\cos. n}{\cos. m} = \frac{\cos. b}{\cos. c}$, то

для $n = a - m$ и $\cos. n = \cos. a \cos. m + \sin. a \sin. m$ получимъ $\cos. a + \frac{\sin. a \sin. m}{\cos. m} = \frac{\cos. b}{\cos. c}$. Но $\frac{\sin. m}{\cos. m} = tg\, m$, а

$tg\, m = \cos. A\ tg\, c$. (§ 40.) Слѣд: $\cos. a + \cos. A \sin. a\ tg\, c = \frac{\cos. b}{\cos. c}$

помноживъ на $\cos. c$ и для $tg\, c. \cos. c = \sin. c$, получимъ

$\cos. a \cos. c + \cos. A \sin. a \sin. c = \cos. b$. Равнымъ образомъ опустивъ перпендикуляръ изъ верху угла B или C получимъ

$\cos. a = \cos. b \cos. c + \cos. A \sin. b \sin. c$ и

$\cos. c = \cos. a \cos. b + \cos. C \sin. a \sin. b$.

44.

44. Изъ треугольниковъ прямоугольныхъ ABD и ADC слѣдуетъ $tg\ AD = tg\ c\ cos.\ \theta = tg\ b\ cos.\ \zeta$, или $\frac{cot.\ \zeta}{cos.\ \theta} = \frac{tg\ c}{tg\ b}$, откуда для $\zeta = A - \theta$ и $cos.\ \zeta = cos.\ A\ cos.\ \theta + sin.\ A\ sin.\ \theta$ получимъ $cos.\ A + sin.\ A\ tg\ \theta = \frac{tg\ c}{tg\ b}$. Но $tg\ \theta = \frac{1}{tg\ B\ cos.\ c}$ (§ 40), слѣдственно выйдетъ

$cos.\ A\ tg\ B\ cos.\ c\ tg\ b = sin.\ c\ tg\ B - sin.\ A\ tg\ b$;

равнымъ образомъ получимъ

$cos.\ B\ tg\ C\ cos.\ a\ tg\ c = sin.\ a\ tg\ C - sin.\ B\ tg\ c$

$cos.\ C\ tg\ A\ cos.\ b\ tg\ a = sin.\ b\ tg\ A - sin.\ C\ tg\ a$

45. Посредствомъ выведенныхъ въ § 41, 42, 43, 44 формулъ можно разрѣшить всѣ задачи до треугольниковъ сферическихъ касающїяся; ибо по даннымъ тремъ всегда найти можно четвертое, какъ то изъ слѣдующихъ предложенїй видно будетъ.

46. Въ сферическомъ треугольникѣ даны три стороны, найти углы.

Рѣшенїе. Положивъ въ сферическомъ треугольникѣ ABC три стороны $AB = c$; $AB = b$ и $BC = a$, изъ § 43 получимъ

$$cos.\ A = \frac{cos.\ a - cos.\ b\ cos.\ c}{sin.\ b\ sin.\ c}$$

$$cos.\ B = \frac{cos.\ b - cos.\ a\ cos.\ c}{sin.\ a\ sin.\ c}$$

$$cos.\ C = \frac{cos.\ c - cos.\ a\ cos.\ b}{sin.\ a\ sin.\ b}$$

47. Отсюда получимъ

$1 - cos.\ A = \frac{sin.\ b\ sin.\ c - cos.\ a + cos.\ b\ cos.\ c}{sin\ b\ sin.\ c}$; Но

$sin.\ b\ sin.\ c + cos.\ b\ cos.\ c = cos.\ (b - c)$ слѣд:

$1 - cos.\ A = \frac{cos.\ (b - c) - cos.\ a}{sin.\ b\ sin.\ c}$. Но вообще извѣстно, что

$cos.\ p - cos.\ q = 2\ sin.\ \frac{1}{2}(q - p)\ sin.\ \frac{1}{2}(p + q)$ слѣд: получимъ

$1 - cos.\ A = \frac{2\ sin.\ \frac{1}{2}(a - b + c)\ sin.\ \frac{1}{2}(a + b - c)}{sin.\ b\ sin.\ c}$ Поелику

$1 - cos.\ A = 2\ sin.\ \frac{1}{2}\ A^2$, то выйдетъ

$$sin.\ \tfrac{1}{2}\ A = \sqrt{\frac{sin.\ \frac{1}{2}(a - b + c)\ sin.\ \frac{1}{2}(a + b - c)}{sin.\ b\ sin.\ c}}.$$

равнымъ

равнымъ образомъ выйдетъ

$$\text{sin.}\ \tfrac{1}{2}\text{B} = \sqrt{\frac{\text{sin.}\ \frac{1}{2}(b-a+c)\ \text{sin.}\ \frac{1}{2}(b+a-c)}{\text{sin.}\ a\ \text{sin.}\ c}}$$

$$\text{sin.}\ \tfrac{1}{2}\text{C} = \sqrt{\frac{\text{sin.}\ \frac{1}{2}(c-a+b)\ \text{sin.}\ \frac{1}{2}(c+a-b)}{\text{sin.}\ b\ \text{sin.}\ a}}$$

48. Придавъ единицу къ найденному косинусу получимъ:

$1+\text{cos.}\ \text{A} = \frac{\text{sin.}\ b\ \text{sin.}\ c+\text{cos.}\ a-\text{cos.}\ b\ \text{cos.}\ c}{\text{sin.}\ b\ \text{sin.}\ c}$; но sin. b sin. c — cos b cos. $c = -$cos. $(b+c)$ и $1+$cos. A $= 2$ cos. $\frac{1}{2}\text{A}^2$; слѣдственно выйдетъ $2\ \text{cos.}\ \frac{1}{2}\text{A}^2 = \frac{\text{cos.}\ a-\text{cos.}\ (b+c)}{\text{sin.}\ b\ \text{sin.}\ c}$. Разрѣшивъ числителя по формулѣ cos. p—cos. $q = 2$ sin. $\frac{1}{2}(q-p)$ sin. $\frac{1}{2}(p+q)$ и извлекши корень квадратной получимъ

$\text{cos.}\ \frac{1}{2}\text{A} = \sqrt{\frac{\text{sin.}\ \frac{1}{2}(b+c-a)\ \text{sin.}\ \frac{1}{2}(b+c+a)}{\text{sin.}\ b\ \text{sin.}\ c}}$. Равнымъ образомъ выйдетъ:

$$\text{cos.}\ \tfrac{1}{2}\text{B} = \sqrt{\frac{\text{sin.}\ \frac{1}{2}(a+c-b)\ \text{sin.}\ \frac{1}{2}(a+c+b)}{\text{sin.}\ a\ \text{sin.}\ c}}\ \text{и}$$

$$\text{cos.}\ \tfrac{1}{2}\text{C} = \sqrt{\frac{\text{sin.}\ \frac{1}{2}(a+b-c)\ \text{sin.}\ \frac{1}{2}(a+b+c)}{\text{sin.}\ a\ \text{sin.}\ b}}$$

49. Отсюда получимъ мы тангенсы половинныхъ угловъ A, B и C:

$$\text{tg}\ \tfrac{1}{2}\text{A} = \sqrt{\frac{\text{sin.}\ \frac{1}{2}(a-b+c)\ \text{sin.}\ \frac{1}{2}(a+b-c)}{\text{sin.}\ \frac{1}{2}(b+c-a)\ \text{sin.}\ \frac{1}{2}(b+c+a)}}$$

$$\text{tg.}\ \tfrac{1}{2}\text{B} = \sqrt{\frac{\text{sin.}\ \frac{1}{2}(b-a+c)\ \text{sin.}\ \frac{1}{2}(b+a-c)}{\text{sin.}\ \frac{1}{2}(a+c-b)\ \text{sin.}\ \frac{1}{2}(a+c+b)}}$$

$$\text{tg}\ \tfrac{1}{2}\text{C} = \sqrt{\frac{\text{sin.}\ \frac{1}{2}(c-a+b)\ \text{sin.}\ \frac{1}{2}(c+a-b)}{\text{sin.}\ \frac{1}{2}(a+b-c)\ \text{sin.}\ \frac{1}{2}(a+b+c)}}$$

50. Всѣ сїи формулы весьма способны къ дѣланїю выкладокъ посредствомъ логариѳмовъ. Нашедъ же одинъ изъ трехъ угловъ, на примѣръ A, прочїе два удобно найдутся по § 41; ибо получимъ

sin. $\text{B} = \frac{\text{sin.}\ b\ \text{sin.}\ \text{A}}{\text{sin.}\ a}$ и sin. $\text{C} = \frac{\text{sin.}\ c\ \text{sin.}\ \text{A}}{\text{sin.}\ a}$, если только извѣстно, что сїи углы больше или меньше угла прямаго; но

но употребляя найденныя формулы разрѣшается сїе сомнѣнїе; ибо сыщется половина угловъ, которая бываетъ всегда меньше угла прямаго.

51. Изъ тангенсовъ половинныхъ угловъ выходятъ такъ же формулы примѣчанїя достойныя; ибо два изъ нихъ помноживъ между собою получимъ

$$\text{tg}\,\tfrac{1}{2}A.\ \text{tg}\,\tfrac{1}{2}B = \frac{\sin.\frac{1}{2}(a+b-c)}{\sin.\frac{1}{2}(a+b+c)}.$$ Но поелику

$\sin. p + \sin. q = 2\sin.\frac{1}{2}(p+q)\cos.\frac{1}{2}(p-q)$ и

$\sin. p - \sin. q = 2\sin.\frac{1}{2}(p-q)\cos.\frac{1}{2}(p+q)$; то выйдетъ

$$1+\text{tg}\,\tfrac{1}{2}A\ \text{tg}\,\tfrac{1}{2}B = \frac{2\sin.\frac{1}{2}(a+b)\ \cos.\frac{1}{2}c}{\sin.\frac{1}{2}(a+b+c)}$$ и

$$1-\text{tg}\,\tfrac{1}{2}A\ \text{tg}\,\tfrac{1}{2}B = \frac{2\cos.\frac{1}{2}(a+b)\ \sin.\frac{1}{2}c}{\sin.\frac{1}{2}(a+b+c)}$$

52. Вычтя или сложивъ два изъ сихъ тангенсовъ получимъ:

$$\text{tg}\,\tfrac{1}{2}A \pm \text{tg}\,\tfrac{1}{2}B = \frac{\left(\sin.\frac{1}{2}(a+c-b) \pm \sin.\frac{1}{2}(b+c-a)\right)\sqrt{\sin.\frac{1}{2}(a+b-c)}}{\sqrt{\sin.\frac{1}{2}(b+c-a)\sin.\frac{1}{2}(a+c-b)\sin.\frac{1}{2}(a+b+c)}}$$

или $$\text{tg}\,\tfrac{1}{2}A \pm \text{tg}\,\tfrac{1}{2}B = \frac{\sin.\frac{1}{2}(a+c-b) \pm \sin.\frac{1}{2}(b+c-a)}{\text{tg}\,\frac{1}{2}C\ \sin.\frac{1}{2}(a+b+c)}$$

поставивъ величину тангенса $\frac{1}{2}C$; разрѣшивъ же числителя по формуламъ Тригонометрическимъ въ § 51 упомянутымъ, выйдетъ

$$\text{tg}\,\tfrac{1}{2}A + \text{tg}\,\tfrac{1}{2}B = \frac{2\cos.\frac{1}{2}(a-b)\ \sin. c.}{\text{tg}\,\frac{1}{2}C\ \sin.\frac{1}{2}(a+b+c)}$$ и

$$\text{tg}\,\tfrac{1}{2}A - \text{tg}\,\tfrac{1}{2}B = \frac{2\sin.\frac{1}{2}(a-b)\ \cos.\frac{1}{2}c}{\text{tg}\,\frac{1}{2}C\ \sin.\frac{1}{2}(a+b+c)}$$

53. Но поелику $\text{tg}\,\frac{1}{2}(A+B) = \dfrac{\text{tg}\,\frac{1}{2}A + \text{tg}\,\frac{1}{2}B}{1-\text{tg}\,\frac{1}{2}A\ \text{tg}\,\frac{1}{2}B}$

то изъ § 51 и 52 получимъ слѣдующїя формулы:

$$\text{tg}\,\tfrac{1}{2}(A+B) = \frac{\cos.\frac{1}{2}(a-b)}{\text{tg}\,\frac{1}{2}C.\ \cos.\frac{1}{2}(a+b)}$$

$$\text{tg}\,\tfrac{1}{2}(A+C) = \frac{\cos.\frac{1}{2}(a-c)}{\text{tg}\,\frac{1}{2}C\ \cos.\frac{1}{2}(a+c)}$$

$$\text{tg}\ \tfrac{1}{2}\,(B+C) = \frac{\cos.\ \tfrac{1}{2}\,(b-c)}{\text{tg}\ \tfrac{1}{2}\,A\ \cos.\ \tfrac{1}{2}\,(b+c)}$$

54. Равнымъ образомъ для $\text{tg}\ \tfrac{1}{2}\,(A-B) = \frac{\text{tg}\ \tfrac{1}{2}\,A - \text{tg}\ \tfrac{1}{2}\,B}{1\ \text{tg} + \tfrac{1}{2}\,A\ \text{tg}\ \tfrac{1}{2}\,B}$ выйдетъ:

$$\text{tg}\ \tfrac{1}{2}\,(A-B) = \frac{\sin.\ \tfrac{1}{2}\,(a-b)}{\text{tg}\ \tfrac{1}{2}\,C\ \sin.\ \tfrac{1}{2}\,(a+b)}$$

$$\text{tg}\ \tfrac{1}{2}\,(A-C) = \frac{\sin.\ \tfrac{1}{2}\,(a-c)}{\text{tg}\ \tfrac{1}{2}\,B\ \sin.\ \tfrac{1}{2}\,(a+c)}\quad \text{и}$$

$$\text{tg}\ \tfrac{1}{2}\,(B-C) = \frac{\sin.\ \tfrac{1}{2}\,(b-c)}{\text{tg}\ \tfrac{1}{2}\,A\ \sin.\ \tfrac{1}{2}\,(b+c)}$$

55. *Въ треугольникѣ сферическомъ даны три угла; найти три стороны.*

Рѣшенїе: Пусть будетъ ABC сферической треугольникъ, коего три угла даны A, B, C, а надлежитъ сыскать три стороны $AB = c$; $AC = b$ и $BC = a$. Тогда по § 42 получимъ

$$\cos.\ a = \frac{\cos.\ A + \cos.\ B\ \cos.\ C}{\sin.\ B\ \sin.\ C}$$

$$\cos.\ b = \frac{\cos.\ B + \cos.\ A\ \cos.\ C}{\sin.\ A\ \sin.\ C}$$

$$\cos.\ c = \frac{\cos.\ C + \cos.\ A\ \cos.\ B}{\sin.\ A\ \sin.\ B}$$

56. Отсюда выходятъ слѣдующїя формулы:

$$1 - \cos.\ a = \frac{-\cos.\ A - \cos.\ (B+C)}{\sin.\ B\ \sin.\ C}.\ \text{Но}$$

$\cos.\ p + \cos.\ q = 2\ \cos.\ \tfrac{1}{2}\,(p+q)\ \cos.\ \tfrac{1}{2}\,(p-q)$; слѣдственно получимъ

$$1 - \cos.\ a = \frac{2\ \cos.\ \tfrac{1}{2}\,(A+B+C)\ \cos.\ \tfrac{1}{2}\,(B+C-A)}{\sin.\ B\ \sin.\ C}$$

$$1 + \cos.\ A = \frac{2\ \cos.\ \tfrac{1}{2}\,(A+B-C)\ \cos.\ \tfrac{1}{2}\,(A-B+C)}{\sin.\ B\ \sin.\ C.}$$

Но поелику $1 - \cos.\ a = 2\,(\sin.\ \tfrac{1}{2}\,a)^2$ и $1 + \cos.\ a = 2\,(\cos.\ \tfrac{1}{2}\,a)^2$; то выйдетъ

$$\sin.\ \tfrac{1}{2}\,a = \sqrt{\frac{-\cos.\ \tfrac{1}{2}\,(A+B+C)\ \cos.\ \tfrac{1}{2}\,(B+C-A)}{\sin.\ B\ \sin.\ C}}$$

$$\sin.\ \tfrac{1}{2}\ b = \sqrt{\frac{-\cos.\ \frac{1}{2}(A+B+C)\ \cos.\ \frac{1}{2}(A+C-B)}{\sin.\ A\ \sin.\ C.}}$$

$$\sin.\ \tfrac{1}{2}\ c = \sqrt{\frac{-\cos.\ (A+B+C)\ \cos.\ \frac{1}{2}(A+B-C)}{\sin.\ A\ \sin.\ B}}$$

При семъ надобно примѣчать, что сумма угловъ $A+B+C$ всегда больше двухъ прямыхъ, а полусумма всегда больше угла прямаго; слѣдственно косинусъ его отрицательную величину имѣетъ.

57. Для косинусовъ половины сторонъ получимъ

$$\cos.\ \tfrac{1}{2}\ a = \sqrt{\frac{\cos.\ \frac{1}{2}(A+B-c)\ \cos.\ \frac{1}{2}(A-B+C)}{\sin.\ B\ \sin.\ C}}$$

$$\cos.\ \tfrac{1}{2}\ b = \sqrt{\frac{\cos.\ \frac{1}{2}(B+A-C)\ \cos.\ \frac{1}{2}(B-A+C)}{\sin.\ A\ \sin.\ C}}$$

$$\cos.\ \tfrac{1}{2}\ c = \sqrt{\frac{\cos.\ \frac{1}{2}(C+A-B)\ \cos.\ \frac{1}{2}(C-A+B)}{\sin.\ A\ \sin.\ B}}$$

58. Изъ синусовъ и косинусовъ половины сторонъ весьма удобно можно вывести ихъ тангенсы; ибо получимъ,

$$tg\ \tfrac{1}{2}\ a = \sqrt{\frac{-\cos.\ \frac{1}{2}(A+B+C)\ \cos.\ \frac{1}{2}(B+C-A)}{\cos.\ \frac{1}{2}(B+A-C)\ \cos.\ \frac{1}{2}(B-A+C)}}$$

$$tg\ \tfrac{1}{2}\ b = \sqrt{\frac{-\cos.\ \frac{1}{2}(A+B+C)\ \cos.\ \frac{1}{2}(A+C-B)}{\cos.\ \frac{1}{2}(B+A-C)\ \cos.\ \frac{1}{2}(B-A+C)}}$$

$$tg\ \tfrac{1}{2}\ c = \sqrt{\frac{-\cos.\ \frac{1}{2}(A+B+C)\ \cos.\ \frac{1}{2}(A+B-C)}{\cos.\ \frac{1}{2}(C+A-B)\ \cos.\ \frac{1}{2}(C-A+B)}}$$

59. Помноживъ два изъ сихъ тангенса между собою, получимъ

$$tg\ \tfrac{1}{2}\ a.\ tg\ \tfrac{1}{2}\ b = \frac{-\cos.\ \frac{1}{2}(A+B+C)}{\cos.\ \frac{1}{2}(A+B-C)}$$ откуда слѣдующія двѣ

произойдутъ формулы:

$$1 - tg\ \tfrac{1}{2}\ a\ tg\ \tfrac{1}{2}\ b = \frac{2\cos.\ \frac{1}{2}(A+B)\ \cos.\ \frac{1}{2}C}{\cos.\ \frac{1}{2}(A+B-C)}$$

$$1 + tg\ \tfrac{1}{2}\ a\ tg\ \tfrac{1}{2}\ b = \frac{2\sin.\ \frac{1}{2}C\ \sin.\ \frac{1}{2}(A+B)}{\cos.\ \frac{1}{2}(A+B-C)}$$

60. Но если сложимъ, или вычтемъ одну формулу изъ другой, то выйдетъ

$$\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}a \pm \mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}b = \frac{\left(\cos.\tfrac{1}{2}(B+C-A) \pm \cos.\tfrac{1}{2}(A+C-B)\right)\sqrt{-\cos.\tfrac{1}{2}(A+B+C)}}{\sqrt{\cos.\tfrac{1}{2}(A+B-C)\,\cos.\tfrac{1}{2}(A+C-B)\,\cos.\tfrac{1}{2}(B+C-A)}}$$

Но поелику $\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}c = \sqrt{\frac{-\cos.\tfrac{1}{2}(A+B+C)\cos.\tfrac{1}{2}(A+B-C)}{\cos.\tfrac{1}{2}(C+A-B)\cos.\tfrac{1}{2}(C-A+B)}}$;

то получимъ

$$\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}a \pm \mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}b = \frac{\cos.\tfrac{1}{2}(B+C-A) \pm \cos.\tfrac{1}{2}(A+C-B)\,\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}c}{\cos.\tfrac{1}{2}(A+B-C)}.$$

Сдѣлавъ по формуламъ для $\cos.\,p + \cos.\,p$ и $\cos.\,p - \cos.\,q$ найденнымъ приведенiе, выйдетъ

$$\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}a + \mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}b = \frac{2\cos.\tfrac{1}{2}C\cos.\tfrac{1}{2}(A-B)\,\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}c}{\cos.\tfrac{1}{2}(A+B-C)}$$

и $$\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}a - \mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}b = \frac{2\sin.\tfrac{1}{2}(A-B)\sin.\tfrac{1}{2}C\,\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}c}{\cos.\tfrac{1}{2}(A+B-C)}.$$

61. И такъ мы найдемъ, какъ и прежде

$$\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}(a-b) = \frac{\cos.\tfrac{1}{2}(A-B)\,\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}c}{\cos.\tfrac{1}{2}(A+B)}$$

$$\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}(a+c) = \frac{\cos.\tfrac{1}{2}(A-C)\,\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}b}{\cos.\tfrac{1}{2}(A+C)}$$

$$\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}(b+c) = \frac{\cos.\tfrac{1}{2}(B-C)\,\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}a}{\cos\tfrac{1}{2}(B+C)}$$

62. Равнымъ образомъ тангенсы половины разности сторонъ будутъ

$$\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}(a-b) = \frac{\sin.\tfrac{1}{2}(A-B)\,\mathrm{tg.}\,\tfrac{1}{2}c}{\sin.\tfrac{1}{2}(A+B)}$$

$$\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}(a-c) = \frac{\sin.\tfrac{1}{2}(A-C)\,\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}b}{\sin.\tfrac{1}{2}(A+C)}$$

$$\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}(b-c) = \frac{\sin.\tfrac{1}{2}(B-C)\,\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}a}{\sin.\tfrac{1}{2}(B+C)}$$

63. *Въ сферическомъ треугольникѣ даны двѣ стороны съ угломъ между ими содержащимся; найти третью сторону и два прочiе угла.*

Рѣшенiе: Пусть будетъ ABC треугольникъ, въ коемъ даны двѣ стороны $AB = c$; $AC = b$ съ угломъ A, который между ими находится: требуется сторона $BC = a$ и

углы

углы B и C. На сей конецъ изъ § 43 получимъ
$\cos. a = \cos. A \sin. b \sin. c + \cos. b \cos. c$: а изъ § 44 выйдетъ
$\mathrm{tg}\ B = \frac{\sin. A\ \mathrm{tg}\ b}{\sin. c - \mathrm{tg}\ b \cos. c \cos. A}$ и
$\mathrm{tg}\ C = \frac{\sin. A\ \mathrm{tg}\ c}{\sin. b - \mathrm{tg}\ c \cos. b \cos. A}$.
Но выраженіе для котангенсовъ будетъ гораздо способнѣе для вычисленія, такъ что выйдутъ для рѣшенія слѣдующія формулы:
$\cot. B = \frac{\sin. c \cot. b - \cos. c \cos. A}{\sin. A}$ и
$\cot. C = \frac{\sin. b \cot. c - \cos. b \cos. A}{\sin. A}$

64. Поелику $\cos. b \cos. c = \frac{1}{2} \cos. (b-c) + \frac{1}{2} \cos. (b+c)$ и $\sin. b \sin. c = \frac{1}{2} \cos. (b-c) - \frac{1}{2} (\cos. b+c)$ то косинусъ стороны a можетъ изобразиться чрезъ сложеніе и вычитаніе простыхъ косинусовъ слѣдующимъ образомъ:
$\cos. a = \frac{1}{4} \cos. (A-b+c) + \frac{1}{4} \cos. (A+b-c) - \frac{1}{4} \cos. (A-b-c) - \frac{1}{4} \cos. (A+b+c) + \frac{1}{2} \cos. (b-c) + \frac{1}{2} \cos. (b+c)$.

65. Но если желаешь употребить логариѳмы, то сія формула совсѣмъ къ тому не годится. Между тѣмъ можно употреблять и самые логариѳмы, введши новой уголъ u; ибо положивъ
$\mathrm{tg}\ u = \frac{\cos. A \sin. b}{\cos. b}$ или $\mathrm{tg}\ u = \cos. A\ \mathrm{tg}\ b$ и нашедъ уголъ u, выйдетъ
$\cos. a = \mathrm{tg}\ u \cos. b \sin. c + \cos. b \cos. c = \frac{\cos. b \cos. (c-u)}{\cos. u}$
откуда уже легко найдется сторона a посредствомъ логариѳмовъ.

66. Введеніе угла u въ выкладки чрезъ формулу $\mathrm{tg}\ u = \cos. A\ \mathrm{tg}\ b$ дѣлаетъ то, что и другія формулы по логариѳмамъ удобно вычислены быть могутъ; ибо выйдетъ
$\mathrm{tg}\ B = \frac{\sin. A\ \mathrm{tg}\ b}{\sin. c - \mathrm{tg}\ u \cos. c} = \frac{\sin. A\ \mathrm{tg}\ b \cos. u}{\sin. (c-u)} = \frac{\mathrm{tg}\ A \sin. u}{\sin. (c-u)}$;
въ разсужденіи же другаго угла C должно употребить формулу $\sin. C = \frac{\sin. A \sin. c}{\sin. a}$ въ § 41 найденную.

67. Но самое легчайшее средство находить углы B и C слѣдуетъ изъ формулъ въ § 53 и 54 найденныхъ, а именно:

$$\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}(B+C)=\frac{\cos.\tfrac{1}{2}(b-c)\cot.\tfrac{1}{2}A}{\cos.\tfrac{1}{2}(b+c)}$$

$$\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}(B-C)=\frac{\sin.\tfrac{1}{2}(b-c)\cot.\tfrac{1}{2}A}{\sin.\tfrac{1}{2}(b+c)}$$; ибо нашедъ половину ихъ суммы вмѣстѣ съ половиною ихъ разности, опредѣлится каждой изъ нихъ особо, а по томъ удобно уже найти можно сторону a изъ формулы

$$\sin.\,a=\frac{\sin.\,b\,\sin.\,A}{\sin.\,B}=\frac{\sin.\,c\,\sin.\,A}{\sin.\,C}$$ § 41.

68. *Въ сферическомъ треугольникѣ даны два угла со стороною между ими находящеюся; найти третей уголъ съ двумя сторонами.*

Рѣшенiе: Пусть будетъ ABC треугольникъ, коего даны два угла A и B и сторона $AB=c$; требуется третiй уголъ C и двѣ стороны $AC=b$ и $BC=a$. На сей конецъ изъ § 42 получимъ $\cos.\,C=\cos.\,c\,\sin.\,A\,\sin.\,B-$ $-\cos.\,A\,\cos.\,B$ а изъ § 44 выйдетъ:

$$\mathrm{tg}\,b=\frac{\sin.\,c\,\mathrm{tg}\,B}{\sin.\,A+\cos.\,c\,\cos.\,A\,\mathrm{tg}\,B}$$ и

$$\mathrm{tg}\,a=\frac{\sin.\,c\,\mathrm{tg}\,A}{\sin.\,B+\cos.\,c\,\cos.\,B\,\mathrm{tg}\,A}$$; или для рѣшенiя сея задачи получимъ слѣдующiя формулы:

$$\cos.\,C=\cos.\,c\,\sin.\,A\,\sin.\,B-\cos.\,A\,\cos.\,B$$

$$\cot.\,a=\frac{\cot.\,A\,\sin.\,B+\cos.\,c\,\cos.\,B}{\sin.\,c}$$ и

$$\cot.\,b=\frac{\cot.\,B\,\sin.\,A+\cos.\,c\,\cot.\,A}{\sin.\,c}$$

69. Двѣ стороны весьма удобно найдутся изъ формулъ въ § 61 найденныхъ, а именно:

$$\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}(a+b)=\frac{\cos.\tfrac{1}{2}(A-B)\,\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}c}{\cos.\tfrac{1}{2}(A+B)}$$

$$\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}(a-b)=\frac{\sin.\tfrac{1}{2}(A+B)\,\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}c}{\sin.\tfrac{1}{2}(A+B)}$$

откуда по логариѳмамъ удобно опредѣлить можно бока a и b.

70. Нашедъ бока a и b легко опредѣлить можно уголъ С по формулѣ $\sin. C = \frac{\sin. A \sin. c}{\sin. a} = \frac{\sin. B \sin. c}{\sin. b}$.

Можно такъ же опредѣлить $\cos. C$ чрезъ простые косинусы слѣдующимъ образомъ:

$\cos. C = \frac{1}{4} \cos. (c + A - B) + \frac{1}{4} \cos. (c - A + B) - \frac{1}{4} \cos. (c - A - B) - \frac{1}{4} \cos. (c + A + B) - \frac{1}{2} \cos. (A - B) - \frac{1}{2} \cos. (A + B)$ поступая при семъ случаѣ точно такъ же, какъ мы прежде въ § 64 нашли косинусъ бока a.

71. *Въ сферическомъ треугольникѣ даны двѣ стороны съ угломъ между ими несодержащимся, или, что то же значитъ, даны два угла со стороною между ими несодержащеюся, найти прочія величины къ сему треугольнику принадлежащія.*

Рѣшеніе: Пусть будетъ АВС треугольникъ, коего даны двѣ стороны $BC = a$ и $AC = b$, тогда уголъ В опредѣлится такъ:

$\sin. B = \frac{\sin A \sin. b}{\sin. a}$. Во второмъ же случаѣ по даннымъ угламъ А и В со стороною $BC = a$ найдется бокъ b изъ формулы $\sin. b = \frac{\sin. a \sin. B}{\sin. A}$. По сему въ томъ и другомъ случаѣ можно почитать за извѣстныя какъ двѣ стороны $BC = a$ и $AC = b$, такъ и два угла А и В имъ противолежащія. И такъ требуется сыскать бокъ $AB = c$ и уголъ С. На сей конецъ изъ § 44 получимъ

$\sin. a \operatorname{tg} C - \sin B \operatorname{tg} c = \cos. a \cos. B \operatorname{tg} C \operatorname{tg} c$ и

$\sin. b \operatorname{tg} C - \sin. A \operatorname{tg} c = \cos. b \cos. A \operatorname{tg} C \operatorname{tg} c$.

Въ сихъ двухъ уравненіяхъ уничтоживъ какъ tg C такъ и tg c, выйдетъ

$$\operatorname{tg} c = \frac{\sin. A \sin. a - \sin. B \sin. b}{\sin. A \cos. B \cos. a - \cos. A \sin. B \cos. b}$$ и

$$\operatorname{tg} C = \frac{\sin. A \sin. a - \sin. B \sin. b}{\cos. B \cos. a \sin. b - \cos. A \sin. a \cos. b}$$

къ коимъ должно прибавить еще сіе уравненіе $\sin. A \sin. b = \sin. B \sin. a$.

72. Поелику $\sin. A : \sin. B = \sin a : \sin. b$, то получимъ

tg

$$\text{tg } c = \frac{\sin. a^2 - \sin. b^2}{\cos. B \sin. a \cos. a - \cos. A \sin. b \cos. b}$$ и

$$\text{tg } C = \frac{\sin. A^2 - \sin. B^2}{\cos. a \sin. B \cos. B - \cos. b \sin. A \cos. A}.$$

73. Но изъ § 53, 54 и 62 получимъ мы еще другія рѣшенія гораздо способнѣйшія, а именно

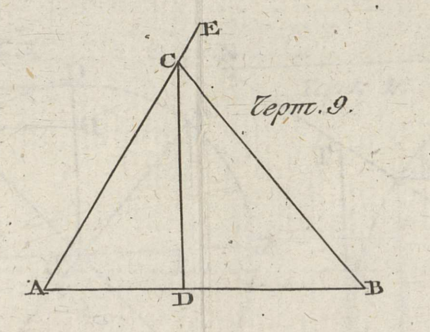
$$\text{tg } \tfrac{1}{2} C = \frac{\cos. \frac{1}{2}(a-b)}{\cos. \frac{1}{2}(a+b)\, \text{tg } \frac{1}{2}(A+B)} = \frac{\cos. \frac{1}{2}(a-b) \cot. \frac{1}{2}(A+B)}{\cos. \frac{1}{2}(a+b)}$$

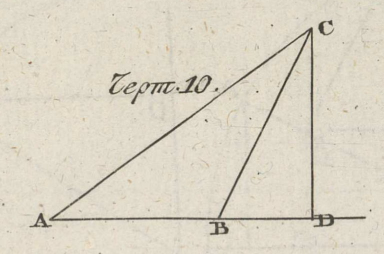
или $\text{tg } \frac{1}{2} C = \frac{\sin. \frac{1}{2}(a-b)\, \text{tg } \frac{1}{2}(A-B)}{\sin. \frac{1}{2}(a+b)}$ такъ же

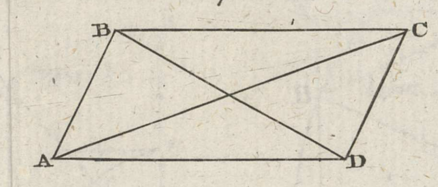
$$\text{tg } \tfrac{1}{2} c = \frac{\cos. \frac{1}{2}(A+B)\, \text{tg } \frac{1}{2}(a+b)}{\cos. \frac{1}{2}(A-B)} = \frac{\sin. \frac{1}{2}(A+B)\, \text{tg } \frac{1}{2}(a-b)}{\sin. \frac{1}{2}(A-B)}.$$

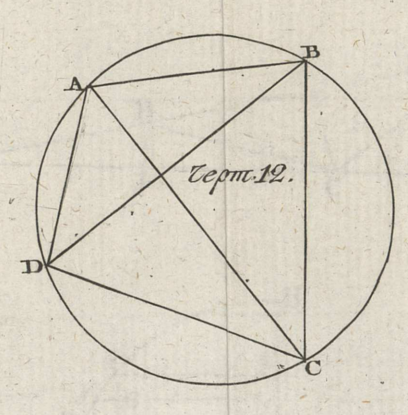
кои формулы по логариѳмамъ весьма удобно изчислить можно.

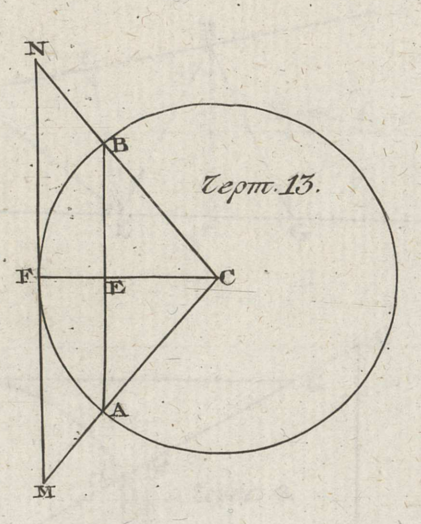
Таблица. II.

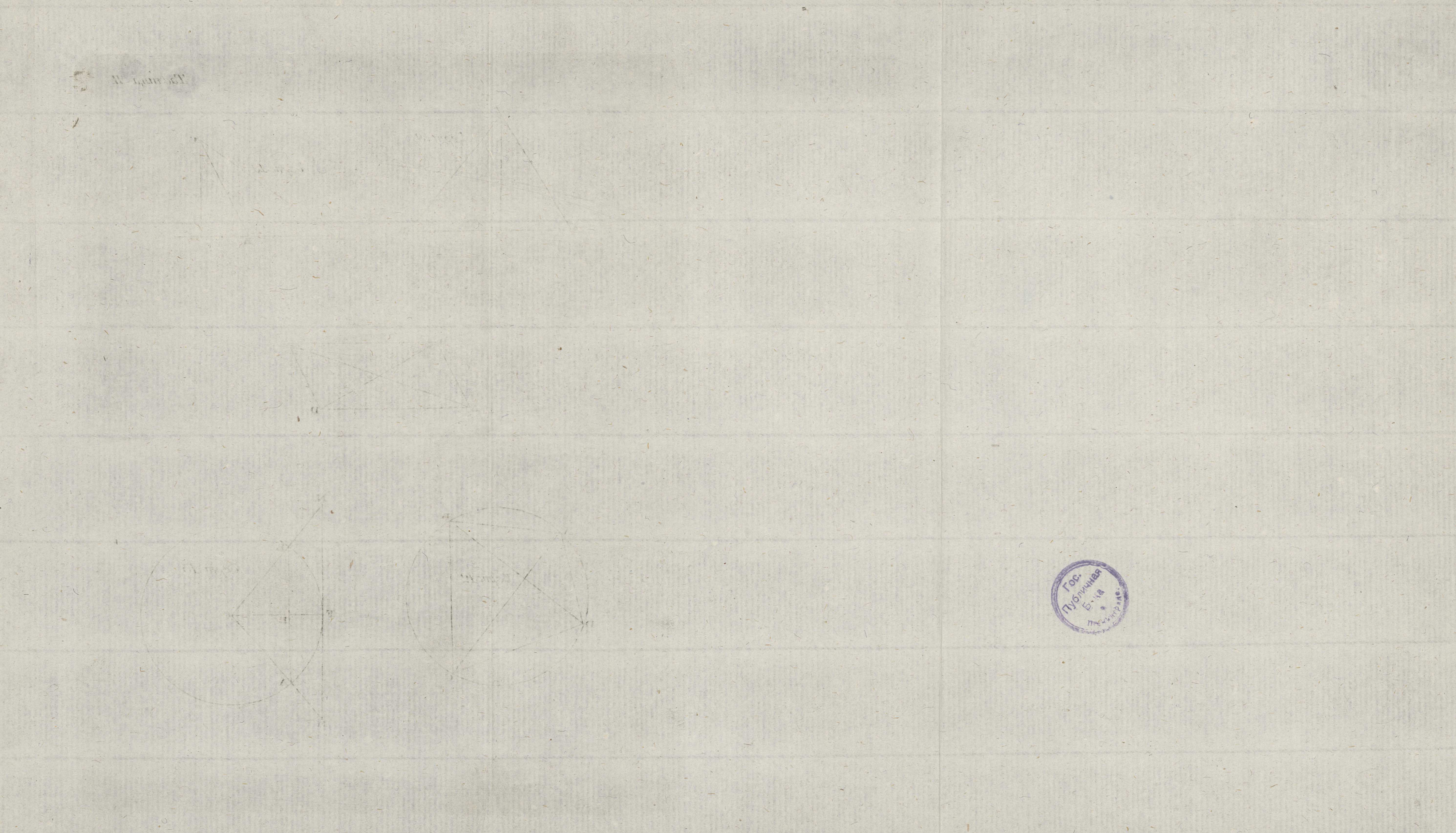

E
C
Черт. 9.
A
D
B


C
Черт. 10.
A
B
D


Черт. 11.
B
C
A
D


A
B
Черт. 12.
D
C


N
B
Черт. 13.
F
E
C
A
M


Гос.
Публичная
Б-ка
в
Ленинграде

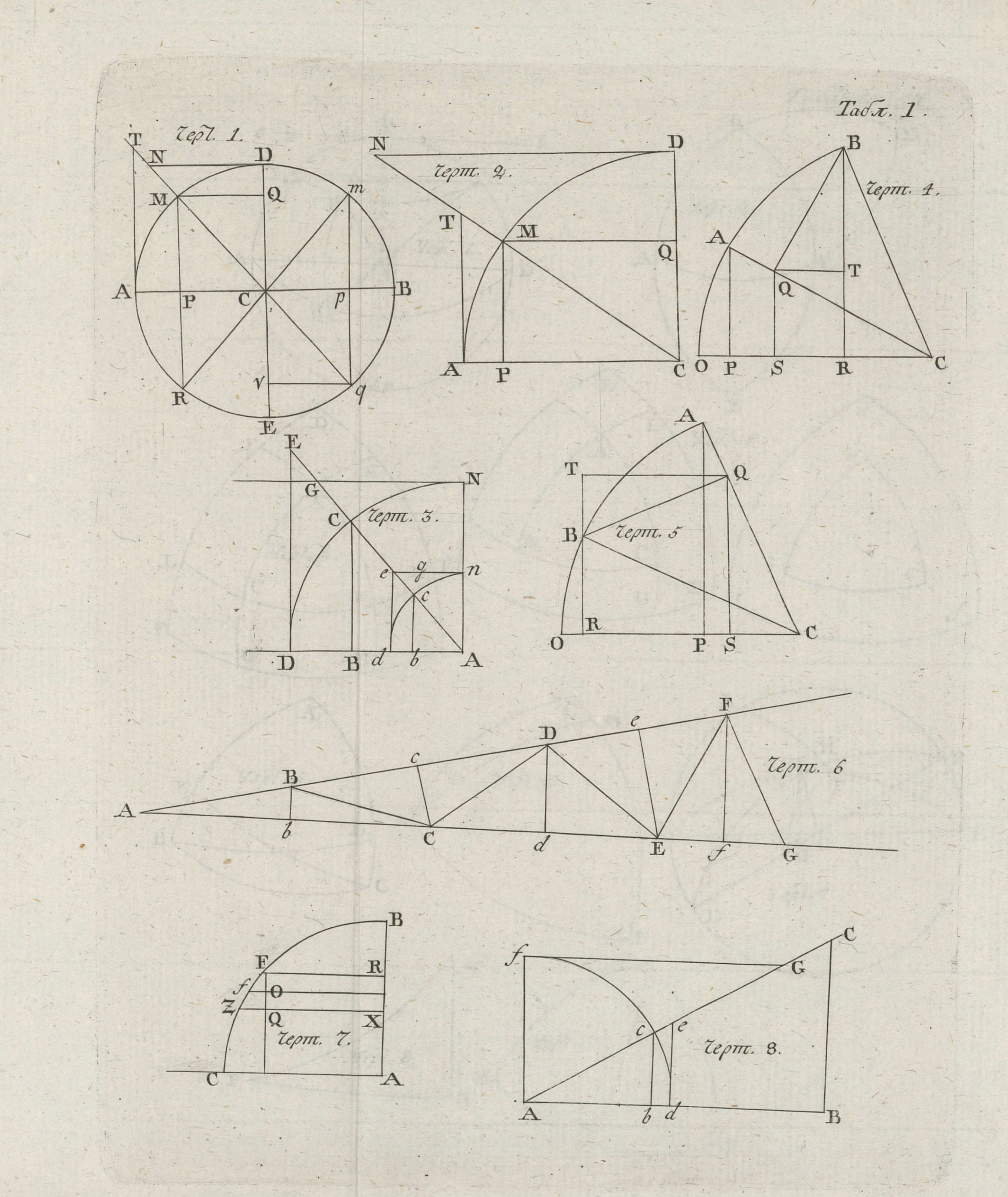
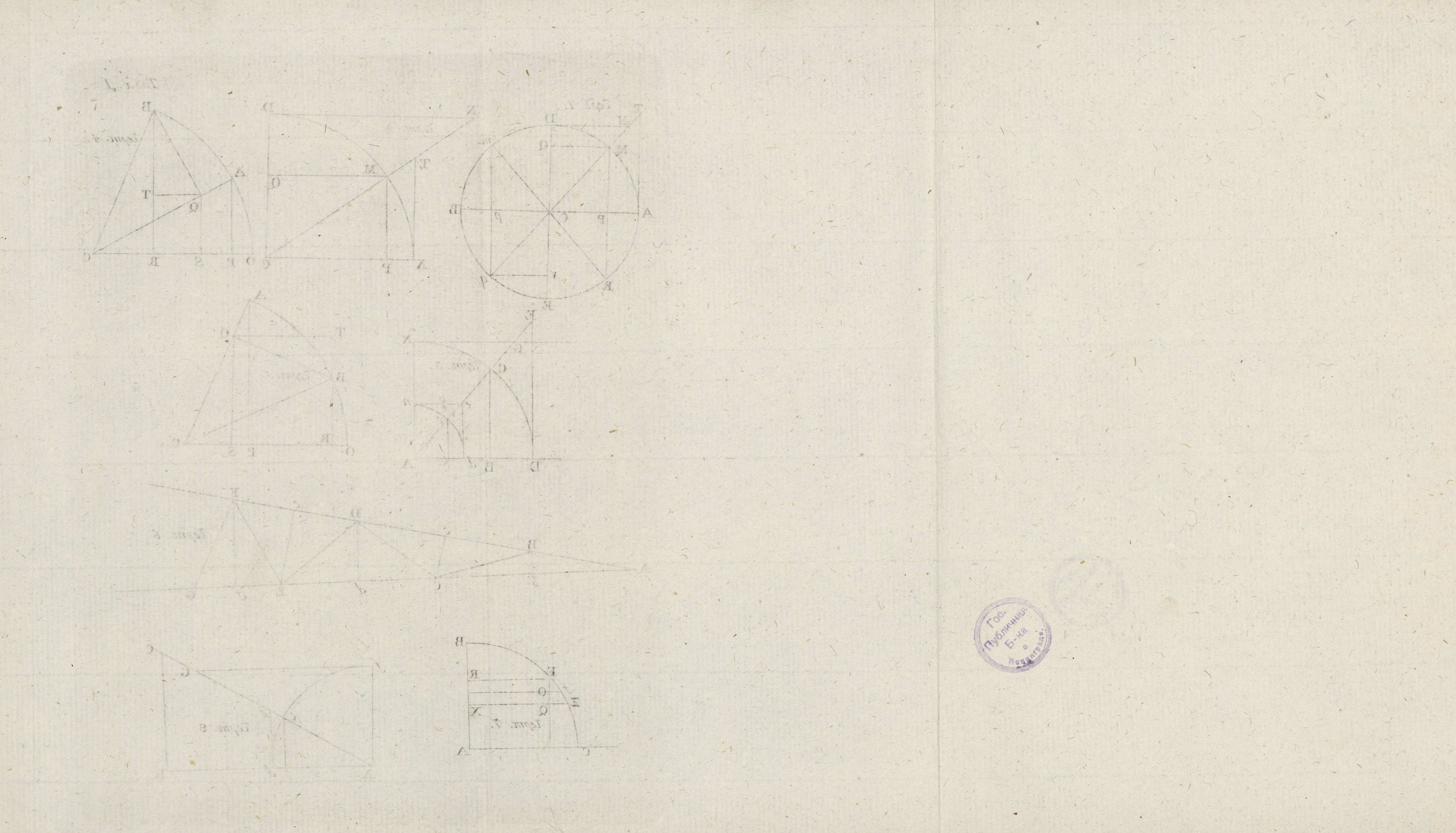
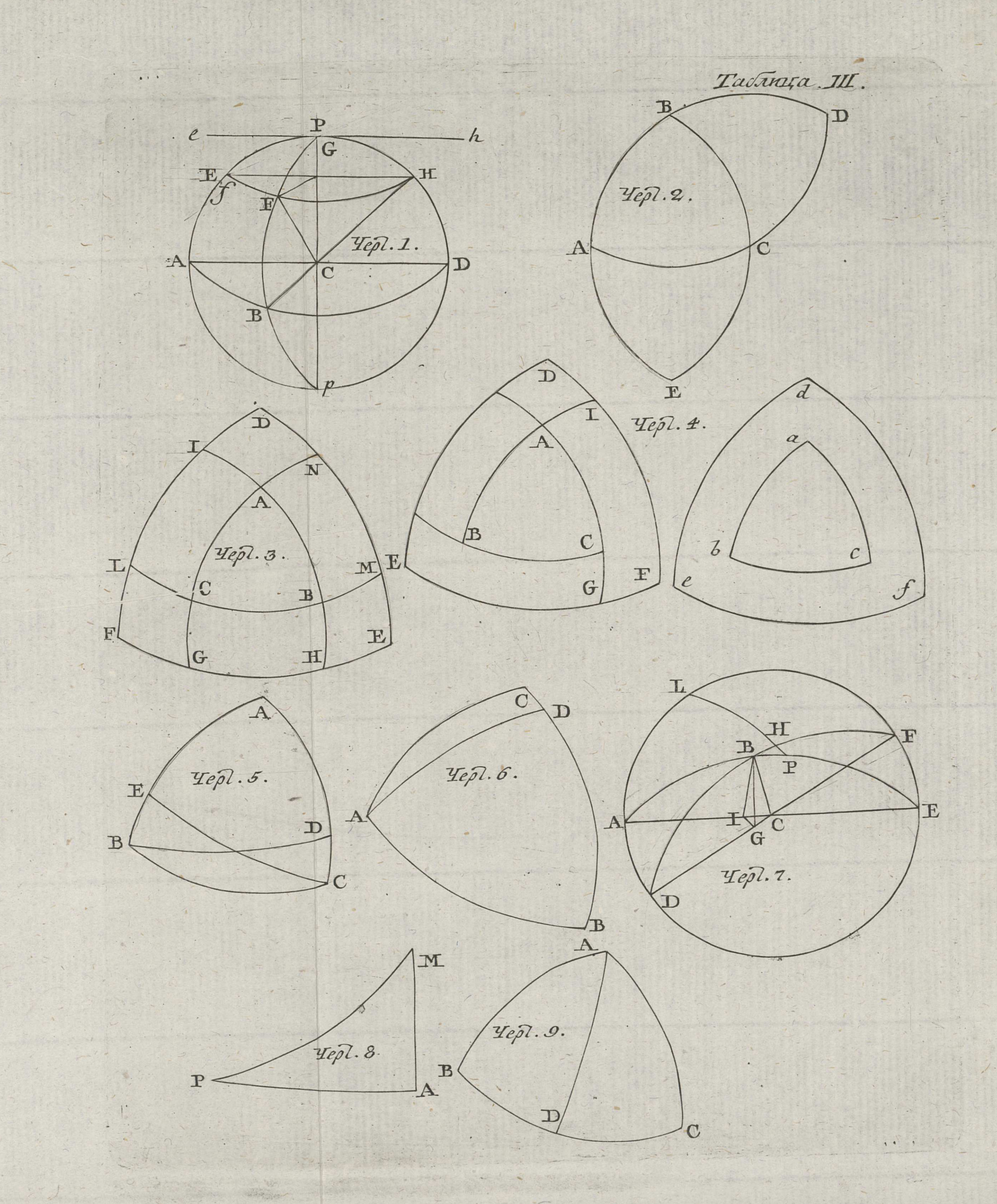


Табл. 1.
Черт. 1.
Черт. 2.
Черт. 3.
Черт. 4.
Черт. 5
Черт. 6
Черт. 7.
Черт. 8.


Гос. Публичная Б-ка в Ленинграде


Таблица III.
Черт. 1.
e
h
P
G
E
H
f
F
A
C
D
B
p
Черт. 2.
B
D
A
C
E
Черт. 3.
D
I
N
A
L
C
B
M
F
G
H
E
Черт. 4.
D
I
A
B
C
E
G
F
d
a
b
c
e
f
Черт. 5.
A
E
B
D
C
Черт. 6.
C
D
A
B
Черт. 7.
L
H
F
B
P
A
I
G
C
E
D
Черт. 8.
M
P
A
Черт. 9.
A
B
D
C

